MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

17. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig

Inhaltsverzeichnis

Seite

Brandt, H., Bilineare Transformation quadratischer Formen 153
van der Corput, J. G., Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme 250
Fekete, M., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten 228
Jänichen, W., Über einen zahlentheoretischen Satz von Hurwitz 277
Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Vierte Abhandlung. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe 62
Neder, L., Über das Wachstum analytischer Funktionen in Halbstreifen und ähnlichen Gebieten 130
Perron, O., Über einen Grenzwertsatz 149
Prüfer, H., Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen 35
Remak, R., Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes. (Erster Teil.) . . 1
Rogosinski, W., Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten 260
Salkowski, E., Über affine Geometrie: Zur Theorie der Affingesimsflächen . . 144
Saxer, W., Über die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten . . . 206
Schouten, J. A., Über die Bianchische Identität für symmetrische Übertragungen. 111
Schouten, J. A., Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. I. 161
Schouten, J. A., Über die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Übertragungen. II. 183
Steinitz, E., Über die Maximalzahl der Doppelpunkte bei ebenen Polygonen von gerader Seitenzahl 116
Timpe, A., Die Airysche Funktion für den Ellipsenring 189
Weyl, H., Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe 293

Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes.

Von

Robert Remak in Berlin.

(Erster Teil.)

Einleitung.

Es seien

$$y_\varkappa = \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

n Linearformen mit reellen Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$. Die Veränderlichen x_λ seien reelle (positive, 0 oder negative), ganze rationale Zahlen. Die Determinante sei

$$|a_{\varkappa\lambda}| = D \neq 0. \tag{2}$$

Die $\eta_\varkappa$ sollen n beliebig gegebene reelle Zahlen bedeuten. Minkowski[1]) hat für $n = 2$ folgenden Satz bewiesen:

Die x_λ sind ganzzahlig stets so bestimmbar, daß

$$\left| \prod_\varkappa (y_\varkappa - \eta_\varkappa) \right| \leqq \frac{|D|}{2^n}; \tag{3}$$

das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn gleichzeitig

$$a_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda \tag{4}$$

und

$$\eta_\varkappa = \left(m_\varkappa + \frac{1}{2}\right) a_{\varkappa\varkappa},$$

wo $m_\varkappa$ eine ganze Zahl.

In diesem Falle ist

$$y_\varkappa = a_{\varkappa\varkappa} x_\varkappa,$$

[1]) Minkowski, H.: Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 42, Kap. II, § 11, oder: Über die Annäherung an eine reelle Größe durch rationale Zahlen [Math. Ann. **54** (1901), S. 91–124]; wieder abgedruckt Ges. Abh., Bd. I, S. 320–352. — Einen anderen Beweis des Satzes für $n = 2$ habe ich geliefert: Journ. f. Math. **142** (1913), S. 278–282.

also

$$|y_\varkappa - \eta_\varkappa| \geqq \frac{|a_{\varkappa\varkappa}|}{2},$$

$$\left|\prod_\varkappa (y_\varkappa - \eta_\varkappa)\right| \geqq \prod_\varkappa \frac{|a_{\varkappa\varkappa}|}{2} = \frac{|D|}{2^n}. \tag{5}$$

Das Gleichheitszeichen wird in (5) für $y_\varkappa = m_\varkappa a_{\varkappa\varkappa}$ erreicht. Die Konstante 2^n im Nenner der rechten Seite von (3) kann also nicht verbessert werden.

Im Gegensatz zu anderen Sätzen, die er für n Variable beweist, hat sich Minkowski hier auf $n = 2$ beschränkt. Die Verallgemeinerung des Satzes stößt auf Schwierigkeiten. Diese Arbeit ist dem Beweise des Satzes für $n = 3$ gewidmet. Die dabei angewandte Methode ist an sich von Interesse. Des besseren Verständnisses halber deute ich jeden Schritt, nachdem er für das ternäre Problem gemacht ist, für das binäre Problem an, obwohl der so entstehende Beweis des binären Satzes für sich länger ist als die vorhandenen Beweise. Im ersten Kapitel der Arbeit ist vom Minkowskischen Satz noch keine Rede. §§ 1 und 2 bringen zur besseren Übersicht die bekannte Reduktion der definiten ternären quadratischen Formen, die in den beiden ersten Kapiteln benutzt wird. Die §§ 3 bis 9 befassen sich mit der Aufgabe[2]), eine quadratische Form

$$Q(x_\lambda - \xi_\lambda)$$

zu einem Minimum zu machen, wenn die ξ_λ beliebig reell gegeben und die x_λ ganzzahlig reell gesucht sind. Im zweiten Kapitel wird mit Hilfe des Satzes vom arithmetischen und geometrischen Mittel von dem Produkt in (3) zu einer quadratischen Form übergegangen und mit Hilfe der Ergebnisse des ersten Kapitels der Minkowskische Satz für $n = 3$ bewiesen. Um die arithmetische Geschlossenheit des Beweises nicht zu stören, bringe ich die geometrische Interpretation ohne vollständigen Beweis erst im dritten Kapitel. Die Punkte mit ganzzahligen x_λ definieren ein Punktgitter. Die Aufgabe des ersten Kapitels führt auf die Einteilung des Raumes in „Wabenzellen“. Der Name rechtfertigt sich, da die Bienen ihre Zellen nach einem ähnlichen Prinzip bauen. Der Minkowskische Satz selber bedeutet die lückenlose Erfüllung des Raumes mit gewissen „Hyperbelgebilden“ dritter Ordnung. Nachdem das Gitter durch Dilatation in Richtung der Koordinatenachsen vorbereitet ist, wird diese auf die lückenlose Überdeckung des Raumes mit Kugeln von bestimmter Größe zurückgeführt. Dies führt gerade auf das Wabenzellenproblem.

---

[2]) Siehe Voronoi, Journ. f. Math. **134**, S. 198–287, und **136**, S. 67–181.

Erstes Kapitel.

§ 1.

Es sei

$$Q(x_\lambda) = \sum_{\lambda,\nu} A_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, 3)$$

eine eigentlich definite ternäre quadratische Form. (Das binäre Problem wird ganz gleichartig behandelt und nur an einigen Stellen, wo es nötig ist, besonders erwähnt. In Formeln, die sich auf das binäre Problem beziehen, werden, um Verwechslungen zu vermeiden, sämtliche Buchstaben mit einem ^ versehen.) *Es gibt nur endlich viele ganzzahlige Wertetripel x_λ, so daß*

$$Q(x_\lambda) \leqq M, \tag{6}$$

wo M eine beliebige positive feste Schranke.

Beweis. Es läßt sich bekanntlich

$$\left\{\begin{aligned} Q(x_\lambda) &= (f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3)^2 + (f_{22}x_2 + f_{23}x_3)^2 + (f_{33}x_3)^2 \\ &= \sum_\gamma \Big(\sum_\lambda f_{\gamma\lambda} x_\lambda\Big)^2 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

darstellen, worin $f_{\gamma\lambda} = 0$ für $\lambda < \gamma$. Es ist die Determinante

$$D(Q) = |A_{\lambda\nu}| = f_{11}^2 f_{22}^2 f_{33}^2,$$

also $f_{\gamma\gamma} \neq 0$. Es muß also auch sein

$$\Big(\sum_\lambda f_{\gamma\lambda} x_\lambda\Big)^2 \leqq M. \tag{8}$$

Es ergeben sich nacheinander für x_3, x_2, x_1 nur endlich viele Werte, die (8) genügen.

Durch die Substitution

$$x_\lambda = \sum_\alpha X_\lambda^{(\alpha)} z_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{9}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $X_\lambda^{(\alpha)}$ und nicht verschwindender Determinante gehe $Q(x)$ in die quadratische Form $R(z_\alpha)$ über.

$$Q(x_\lambda) = \sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta = R(z_\alpha). \tag{10}$$

Hierin ist

$$B_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\nu} A_{\lambda\nu} X_\lambda^{(\alpha)} X_\nu^{(\beta)} = Q(X_\lambda^{(\alpha)}, X_\nu^{(\beta)}),$$

worin der letzte Ausdruck die Bilinearform bedeutet. Speziell ist $B_{\alpha\alpha} = Q(X_\lambda^{(\alpha)})$. Es liefern im allgemeinen die ganzzahligen z_α ein Teilsystem der ganzzahligen x_λ. Nur wenn die Determinante

$$|X_\lambda^{(\alpha)}| = \pm 1, \tag{11}$$

sind beide Systeme äquivalent. Es seien nun die $X_\lambda^{(\alpha)}$ so gewählt, daß für alle ganzzahligen Wertetripel x_λ außer denen, die in (9) eingesetzt bei der Auflösung

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0 \tag{12}$$

ergeben (das sind also die Werte $x_\lambda = 0$), sich

$$Q(x_\lambda) \geqq Q(X_\lambda^{(1)}) = B_{11} \tag{13}$$

ergibt. Für alle ganzzahligen Wertetripel, außer denen, die in (9) eingesetzt

$$z_2 = 0, \quad z_3 = 0 \tag{14}$$

ergeben, sei

$$Q(x_\lambda) \geqq Q(X_\lambda^{(2)}) = B_{22}. \tag{15}$$

Für alle ganzzahligen Werbetripel, außer denen, die in (9) eingesetzt

$$z_3 = 0 \tag{16}$$

ergeben, sei

$$Q(x_\lambda) \geqq Q(X_\lambda^{(3)}) = B_{33}. \tag{17}$$

Speziell folgt aus (13) und (15)

$$B_{33} \geqq B_{22} \geqq B_{11}. \tag{18}$$

Solche Systeme lassen sich nach (6) durch Auswahl unter endlich vielen finden.

Es soll bewiesen werden, daß unter den Voraussetzungen (12) bis (17) die Gleichung (11) erfüllt sein muß. Es läßt sich entsprechend (7) darstellen:

$$R(z_\alpha) = \sum_\gamma \left(\sum_\alpha c_{\gamma\alpha} z_\alpha\right)^2,$$

worin $c_{\gamma\alpha} = 0$ für $\alpha < \gamma$. Es ist

$$\sum_\gamma c_{\gamma\alpha}^2 = B_{\alpha\alpha}, \tag{19}$$

also

$$c_{\alpha\alpha}^2 \leqq B_{\alpha\alpha}. \tag{20}$$

Es seien die ζ_α irgendein nicht ganzzahliges Wertetripel; dann verfüge man in

$$R(z_\alpha - \zeta_\alpha) = \sum_\gamma \left(\sum_\alpha c_{\gamma\alpha}(z_\alpha - \zeta_\alpha)\right)^2 \tag{21}$$

nacheinander über z_3, z_2, z_1 ganzzahlig so, daß

$$\left|\sum_\alpha c_{\gamma\alpha}(z_\alpha - \zeta_\alpha)\right| \leqq \frac{|c_{\gamma\gamma}|}{2} \tag{22}$$

wird. Dann erhält man aus (21), (22), (20), (18)

$$R(z_\alpha - \zeta_\alpha) \leqq \sum_\gamma \frac{c_{\gamma\gamma}^2}{4} \leqq \sum_\gamma \frac{B_{\gamma\gamma}}{4} \leqq \frac{3}{4} B_{33}. \tag{23}$$

Wenn speziell $\zeta_3 = 0$, so wird

$$R(z_\alpha - \zeta_\alpha) \leqq \frac{2}{4} B_{22}. \tag{24}$$

Wenn speziell $\zeta_2 = 0$; $\zeta_3 = 0$, so wird

$$R(z_\alpha - \zeta_\alpha) \leqq \frac{1}{4} B_{11}. \tag{25}$$

Gäbe es ein ganzzahliges Werbetripel ξ_λ, so daß

$$\xi_\lambda = \sum_\alpha X_\lambda^{(\alpha)} \zeta_\alpha \tag{26}$$

durch nicht ganzzahlige ζ_α auflösbar wäre, so wäre

$$Q(x_\lambda - \xi_\lambda) = R(z_\alpha - \zeta_\alpha) \tag{27}$$

und (23), (24), (25) stünden im Widerspruch zu (17), (15), (13). Also müssen die ganzzahligen Systeme der x_λ und z_α äquivalent und es muß (11) erfüllt sein. Die Form $R(z_\alpha)$ heißt eine reduzierte Form.

§ 2.

Von den unendlich vielen Bedingungen (13), (15), (17) sollen endlich viele so ausgewählt werden, daß die übrigen aus ihnen folgen. Wenn die drei Nebenkoeffizienten $B_{\alpha\beta}$, wo $\alpha \neq \beta$, nicht schon alle drei gleiches Vorzeichen haben, so sind zwei von gleichem Vorzeichen. Dies kehre man um, indem man das Vorzeichen des gemeinsamen z_α umkehrt. Man kann also annehmen, daß die drei Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben.

Zunächst gilt für beide Vorzeichen gemeinsam: wenn a, b, c die drei Zahlen 1, 2, 3 in irgendeiner Reihenfolge, $b > a$ und $z_c = 0$, so muß nach (14) bis (17) sein:

$$R(z_a = 1, z_b = \pm 1, z_c = 0) = B_{aa} \pm 2B_{ab} + B_{bb} \geqq B_{bb}, \tag{28}$$

also

$$B_{aa} \pm 2B_{ab} \geqq 0,$$

oder mit Rücksicht auf (18) und (28)

$$|B_{ab}| \leqq \frac{1}{2} B_{aa} \leqq \frac{1}{2} B_{bb}. \tag{29}$$

Wenn umgekehrt (29) gilt, so ist, wenn $z_a \neq 0$, $z_b \neq 0$,

$$\begin{aligned} R(z_a, z_b, 0) &= B_{aa} z_a^2 + 2B_{ab} z_a z_b + B_{bb} z_b^2 \geqq B_{aa} z_a^2 - B_{aa} |z_a z_b| + B_{bb} z_b^2 \\ &= B_{aa} (|z_a| - |z_b|)^2 + B_{aa} |z_a| \, |z_b| + (B_{bb} - B_{aa}) |z_b|^2 \\ &\geqq 0 + B_{aa} + (B_{bb} - B_{aa}) = B_{bb}. \end{aligned}$$

Fall (A). Es sei

$$B_{\alpha\beta} \geqq 0 \tag{30}$$

und sämtliche $z_\alpha \neq 0$. Es soll gezeigt werden, daß die Bedingungen (29) hinreichend sind dafür, daß $R(z_\alpha)$ reduziert. Wenn zunächst sämtliche $z_\alpha > 0$, so ist

$$R(z_1, z_2, z_3) \geqq B_{33}.$$

Der Fall, daß sämtliche $z_\alpha < 0$, ist diesem äquivalent. Es sei also, nötigenfalls nach Umkehrung aller drei Vorzeichen

$$z_a > 0, \quad z_b > 0, \quad z_c < 0;$$

dann wird

$$\begin{aligned} R(z_a, z_b, z_c) &= \sum_\alpha B_{\alpha\alpha}|z_a|^2 + 2B_{ab}|z_a||z_b| - 2B_{ac}|z_a||z_c| - 2B_{bc}|z_b||z_c| \\ &= (B_{aa} - B_{ac})|z_a|^2 + (B_{bb} - B_{bc})|z_b|^2 + (B_{cc} - B_{ac} - B_{bc})|z_c|^2 \\ &\quad + 2B_{ab}|z_a||z_b| + B_{ac}(|z_a| - |z_c|)^2 + B_{bc}(|z_b| - |z_c|)^2 \\ &\geqq (B_{aa} - B_{ac}) + (B_{bb} - B_{bc}) + (B_{cc} - B_{ac} - B_{bc}) + 0 + 0 + 0 \\ &\geqq (B_{11} + B_{22} + B_{33}) - (B_{11} + B_{22}) = B_{33}. \end{aligned}$$

Fall (B). Es seien alle drei

$$B_{\alpha\beta} \leqq 0: \tag{31}$$

Es ist notwendig, daß

$$R(1,1,1) = B_{11} + B_{22} + B_{33} - 2|B_{12}| - 2|B_{13}| - 2|B_{23}| \geqq B_{33} \tag{32}$$

oder

$$|B_{12}| + |B_{13}| + |B_{23}| \leqq \tfrac{1}{2}B_{11} + \tfrac{1}{2}B_{22}. \tag{33}$$

(33) folgt nicht aus (29) und ist in Verbindung mit (29) hinreichend dafür, daß $R(z_a)$ reduziert. Betrachtet man die Indizes 1, 2, 3 zyklisch mod 3, so ist, wenn sämtliche $z_\alpha \neq 0$, nach (31) und (32)

$$\begin{aligned} R(z_\alpha) \geqq R(|z_\alpha|) &= \sum_\alpha |B_{\alpha,\alpha+1}|(|z_\alpha| - |z_{\alpha+1}|)^2 \\ &\quad + \sum_\alpha (B_{\alpha\alpha} - |B_{\alpha,\alpha+1}| - |B_{\alpha,\alpha-1}|)|z_\alpha|^2 \\ &\geqq \sum_\alpha 0 + \sum_\alpha (B_{\alpha\alpha} - |B_{\alpha,\alpha+1}| - |B_{\alpha,\alpha-1}|) = R(1,1,1) \geqq B_{33}. \end{aligned}$$

§ 3.

Es sei ξ_λ ein beliebiges reelles Wertetripel. Zu diesem sei ein ganzzahliges Wertetripel X_λ so bestimmt, daß für alle möglichen ganzzahligen Wertetripel x_λ

$$w(\xi_\lambda) = Q(X_\lambda - \xi_\lambda) \leqq Q(x_\lambda - \xi_\lambda). \tag{34}$$

$w(\xi_\lambda)$ bedeutet den Minimalwert als Funktion der ξ_λ allein aufgefaßt. Ein solches Wertetripel läßt sich durch Auswahl unter endlich vielen finden, denn es gibt nur endlich viele Wertetripel, für die

$$Q(x_\lambda - \xi_\lambda) \leqq M,$$

wo M eine feste positive Zahl. Zum Beweise ersetze man in (6), (7), (8) x_λ durch $x_\lambda - \xi_\lambda$.

Wenn $\bar{x}_\lambda$ ein ganzzahliges Wertetripel, so ist

$$w(\xi_\lambda - \bar{x}_\lambda) = w(\xi_\lambda). \tag{35}$$

Man kann $\bar{x}_\lambda$ ganzzahlig so bestimmen, daß

$$0 \leqq \xi_\lambda - \bar{x}_\lambda \leqq 1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3). \tag{36}$$

Bei festem $\bar{x}_\lambda$ besitzt die stetige Funktion (35) in dem endlichen abgeschlossenen Bereich (36) ein Maximum $W(Q)$, das nur noch von der gegebenen quadratischen Form $Q(x_\lambda)$ abhängt. Es soll bewiesen werden, daß, wenn Ξ_λ ein spezielles Wertetripel, für welches

$$W(Q) = w(\Xi_\lambda), \tag{37}$$

es mindestens vier verschiedene ganzzahlige Wertetripel

$$X_\lambda^\varrho \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, 3, 4 \\ \lambda = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \tag{38}$$

gibt, so daß

$$w(\Xi_\lambda) = Q(X_\lambda^{(\tau)} - \Xi_\lambda) \qquad (\tau = 1, 2, 3, 4), \tag{39}$$

und die Determinante

$$\left| \begin{matrix} X_\lambda^{(\varrho)} \\ 1 \end{matrix} \right| = \pm 1 \tag{40}$$

wird. Um die beiden Behauptungen (39) und (40) zu beweisen, verfahre ich folgendermaßen. Zunächst setze ich voraus, (40) sei erfüllt, (39) vorläufig nicht; dann löse ich die Gleichungen

$$Q(X_\lambda^{(\tau)} - \Xi_\lambda) = K \qquad (\tau = 1, 2, 3, 4) \tag{41}$$

mit den Unbekannten Ξ_λ, K auf, was rational gelingen wird. Mit Hilfe der so gewonnenen Formeln zeige ich, daß, wenn

$$w(\xi_\lambda) = Q(X_\lambda^{(\tau)} - \xi_\lambda) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, T),$$

wo $T < 4$, $w(\xi_\lambda)$ vergrößert werden, also nicht gleich seinem absoluten Maximum $W(Q)$ sein kann. Der Wert $W(Q)$, ebenso ein relatives Maximum von $w(\xi_\lambda)$, kann mithin nur angenommen werden an einer Stelle $\xi_\lambda = \Xi_\lambda$, wo (41) erfüllt ist. Nunmehr füge ich die Voraussetzung (39) hinzu und zeige, daß sie äquivalent ist einer Bedingung

$$S(m^{(\varrho)}) \leqq 0, \tag{42}$$

wo $S(m^{(\varrho)})$ eine noch näher zu definierende, aus $Q(x_\lambda)$ entstehende quadratische Form und die $m^{(\varrho)}$ irgend vier ganze Zahlen, die der Bedingung

$$\sum_{\varrho} m^{(\varrho)} = 1$$

genügen. Im § 4 zeige ich, daß die unendlich vielen Bedingungen (42) die Folge sind von 12 unter ihnen, nämlich von

$$S(1, 1, -1, 0) \leqq 0 \tag{43}$$

und den hieraus durch Vertauschung der Werte der Variablen entstehenden Bedingungen. Die Koeffizienten von $S(m^{(\varrho)})$ werden zu dem Zwecke aus sechs voneinander unabhängigen positiven Größen g_{pq} aufgebaut. Es durchlaufen p und q die Indizes a, b, c, d; es ist $g_{pq} = g_{qp}$ und $g_{pp} = 0$.

Bereits hinter § 4 wäre ich imstande, mit Hilfe der in §§ 1 und 2 behandelten Reduktion zu zeigen, daß sich immer mindestens *ein* System (38) so finden läßt, daß (40) und (43), mithin (39) erfüllt ist. Ich ziehe es vor, die Voraussetzung, daß es *ein* System (38) gibt, so daß (40) und (43) erfüllt sind, noch beizubehalten und in § 5 sofort zu einer weiteren Umformung von $Q(x_\lambda)$, nämlich $T(\nu_L)$ überzugehen, die aus den sechs Größen g_{pq} symmetrisch in den Indizes a, b, c, d aufgebaut ist. Die 24 Vertauschungen der Indizes a, b, c, d, bei denen (40) erhalten bleibt, führen $S(m^{(\varrho)})$ in nur drei wesentlich verschiedene Formen $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}$ über, denen an Stelle von (41) $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}$ entsprechen. In § 6 halte ich in (34) X_λ fest und betrachte die Ungleichung als Bedingung für ξ_λ. Die unendlich vielen Bedingungen (34) sind die Folge von 14 unter ihnen, die in bezug auf die drei Variablen $\nu_{\mathrm{I}}, \nu_{\mathrm{II}}, \nu_{\mathrm{III}}$ von $T(\nu_L)$ symmetrisch sind. Wendet man das Vergrößerungsverfahren des § 3 für $w(\xi_\lambda)$ wieder an, so zeigt sich, daß man nur zu den Maximalwerten $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}$ gelangen kann; diese sind also die einzigen relativen Maxima; also ist

$$W(Q) = \operatorname*{Max}_{L=\mathrm{I,\,II,\,III}} (K_L).$$

Die Bedingungen (40) und (43) sind also für alle relativen Maxima erfüllt, wofern sie für eins von ihnen gelten. Von dieser Voraussetzung werde ich mich in § 7 mit Hilfe der Reduktion der quadratischen Formen aus §§ 1 und 2 befreien.

Es werde zunächst *vorausgesetzt*, es seien (38) irgend vier ganzzahlige Wertetripel, so daß (40) erfüllt ist; dagegen werde (39) zunächst nicht vorausgesetzt. Es sei

$$x_\lambda = \sum_{\varrho} m^{(\varrho)} X_\lambda^{(\varrho)}, \tag{44}$$

$$1 = \sum_{\varrho} m^{(\varrho)}, \tag{45}$$

ebenso

$$\xi_\lambda = \sum_\varrho \mu^{(\varrho)} X_\lambda^{(\varrho)}, \tag{46}$$

$$1 = \sum_\varrho \mu^{(\varrho)}. \tag{47}$$

Diese Gleichungssysteme sind wegen (40) stets eindeutig auflösbar; und zwar ist die Auflösung von (44) und (45) nach den $m^{(\varrho)}$ ganzzahlig für ganzzahlige x_λ. Setzt man zur Abkürzung

$$m^{(\varrho)} - \mu^{(\varrho)} = \delta^{(\varrho)},$$

so wird nach (45) und (47)

$$\sum_\varrho \delta^{(\varrho)} = \sum_\varrho (m^{(\varrho)} - \mu^{(\varrho)}) = 1 - 1 = 0. \tag{48}$$

Es wird ferner nach (44) und (46)

$$x_\lambda - \xi_\lambda = \sum_\varrho \delta^{(\varrho)} X_\lambda^{(\varrho)} \tag{49}$$

und unter Benutzung von (48) und (49)

$$\left\{\begin{aligned} Q(x_\lambda - \xi_\lambda) &= Q\Big(\sum_\varrho \delta^{(\varrho)} X_\lambda^{(\varrho)}\Big) = \sum_{\varrho,\sigma} \delta^{(\varrho)} \delta^{(\sigma)} Q(X_\lambda^{(\varrho)}, X_\nu^{(\sigma)}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma} \delta^{(\varrho)} \delta^{(\sigma)} \{Q(X_\lambda^{(\varrho)} - X_\lambda^{(\sigma)}) - Q(X_\lambda^{(\varrho)}) - Q(X_\lambda^{(\sigma)})\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma} \delta^{(\varrho)} \delta^{(\sigma)} Q(X_\lambda^{(\varrho)} - X_\lambda^{(\sigma)}) + 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_\sigma (\delta^{(\sigma)}) \{\sum_\varrho \delta^{(\varrho)} Q(X_\lambda^{(\varrho)})\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma} \delta^{(\varrho)} \delta^{(\sigma)} Q(X_\lambda^{(\varrho)} - X_\lambda^{(\sigma)}). \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$Q(X_\lambda^{(\varrho)} - X_\lambda^{(\sigma)}) = E^{(\varrho\,\sigma)},$$

so wird

$$E^{(\varrho\,\sigma)} = E^{(\sigma\,\varrho)} > 0, \qquad (\varrho \neq 0),$$

$$E^{(\varrho\,\varrho)} = 0,$$

und es ergibt sich aus (50)

$$Q(x_\lambda - \xi_\lambda) = -\frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma} \delta^{(\varrho)} \delta^{(\sigma)} E^{(\varrho\,\sigma)} = -\frac{1}{2} S(\delta^{(\varrho)}). \tag{51}$$

Hierin ist $S(\delta^{(\varrho)})$ zur Abkürzung für die quadratische Form eingeführt.

Es soll zunächst ein Wertetripel Ξ_λ und ein Funktionswert K so bestimmt werden, daß

$$Q(X_\lambda^{(\tau)} - \Xi_\lambda) = K \qquad (\tau = 1, 2, 3, 4) \tag{52}$$

Entsprechend (44), (45) setze man

$$X_\lambda^{(\varrho)} = \sum_\sigma M^{(\varrho\sigma)} X_\lambda^{(\sigma)}, \tag{53}$$

$$1 = \sum_\sigma M^{(\varrho\sigma)}. \tag{54}$$

Dies Gleichungssystem wird durch

$$M^{(\varrho\sigma)} = 0 \qquad (\varrho \neq \sigma), \tag{55}$$

$$M^{(\varrho\varrho)} = 1 \tag{56}$$

gelöst. Entsprechend (46), (47) wird

$$\Xi_\lambda = \sum_\varrho \mathsf{M}^{(\varrho)} X_\lambda^{(\varrho)}, \tag{57}$$

$$1 = \sum \mathsf{M}^{(\varrho)}. \tag{58}$$

Man setze zur Abkürzung die Linearformen

$$\sum_\sigma E^{(\varrho\sigma)} \mu^{(\sigma)} = J^{(\varrho)}(\mu^{(\sigma)}). \tag{59}$$

Setzt man (53) und (57) in (51) ein, so erhält man wegen (55) und (56)

$$\left\{\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma} [(M^{(\tau\varrho)} - \mathsf{M}^{(\varrho)})(M^{(\tau\sigma)} - \mathsf{M}^{(\sigma)}) E^{(\varrho\sigma)}] \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\varrho,\sigma} \mathsf{M}^{(\varrho)} \mathsf{M}^{(\sigma)} E^{(\varrho\sigma)} - 2 J^{(\tau)}(\mathsf{M}^{(\sigma)}) \right\} \end{aligned}\right. \tag{60}$$

oder

$$\Phi = K + \frac{1}{2} \sum_{\varrho,\sigma} \mathsf{M}^{(\varrho)} \mathsf{M}^{(\sigma)} E^{(\varrho\sigma)} = J^{(\tau)}(\mathsf{M}^{(\sigma)}) \quad (\tau = 1, 2, 3, 4), \tag{61}$$

worin Φ als Abkürzung für die linke Seite eingeführt ist. Die fünf Unbekannten $\mathsf{M}^{(\sigma)}$, Φ genügen den fünf linearen Gleichungen

$$-\sum_\sigma \mathsf{M}^{(\sigma)} E^{(\tau\sigma)} + \Phi = 0, \tag{62}$$

$$\sum_\sigma \mathsf{M}^{(\sigma)} = 1. \tag{63}$$

Wofern die Determinante dieses Gleichungssystems

$$D(S) = \begin{vmatrix} -E^{(\tau\sigma)}, & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{64}$$

nicht verschwindet, kann man die $\mathsf{M}^{(\sigma)}$ und Φ eindeutig berechnen. Es wird übrigens

$$\Phi = \frac{\begin{vmatrix} -E^{(\tau\sigma)}, & 0 \\ 1 & , 1 \end{vmatrix}}{D(S)} = \frac{|E^{(\tau\sigma)}|}{D(S)}. \tag{65}$$

Setzt man Φ in den mittleren Ausdruck von (61) ein, so erhält man wegen (58)

$$\Phi = K + \frac{1}{2}\sum_{\varrho} \mathsf{M}_\varrho J^{(\varrho)}(\mathsf{M}^{(\sigma)}) = K + \frac{1}{2}\sum_{\varrho} \mathsf{M}_\varrho \Phi = K + \frac{1}{2}\Phi; \tag{66}$$

also ist

$$\frac{1}{2}\Phi = K. \tag{67}$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß

$$D(S) < 0,$$

also das System (62), (63) stets auflösbar ist. Wegen (51) ist

$$-\frac{1}{2}S(\delta^{(\varrho)}) > 0,$$

sowie

$$\sum_{\varrho}(\delta^{(\varrho)}) = 0, \tag{68}$$

und nicht sämtliche $\delta^{(\varrho)} = 0$.

Im folgenden seien $\varrho, \sigma = 1, 2, 3$; $\varrho = 4$, $\sigma = 4$ mögen besonders geschrieben werden. Dann ist nach (68)

$$\delta^{(4)} = -\sum_{\varrho}^{3} \delta^{(\varrho)}, \tag{69}$$

also

$$-\frac{1}{2}\sum_{\varrho,\sigma}^{3} E^{(\varrho\sigma)}\delta^{(\varrho)}\delta^{(\sigma)} - \frac{1}{2}\sum_{\varrho}^{3} E^{(\varrho 4)}\delta^{(\varrho)}\left(-\sum_{\sigma}^{3}\delta^{(\sigma)}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\sigma}^{3} E^{(4\sigma)}\left(-\sum_{\varrho}^{3}\delta^{(\varrho)}\right)\cdot\delta^{(\sigma)} > 0,$$

oder

$$S^{3}(\delta^{(\varrho)}) = \sum_{\varrho,\sigma}^{3}(-E^{(\varrho\sigma)} + E^{(\varrho 4)} + E^{(4\sigma)})\delta^{(\varrho)}\delta^{(\sigma)} > 0.$$

Dies ist aber eine definite quadratische Form in den drei unabhängigen Variablen $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, $\delta^{(3)}$; also ist die Determinante

$$|-E^{(\varrho\sigma)} + E^{(\varrho 4)} + E^{(4\sigma)}| > 0 \tag{70}$$

oder

$$\begin{vmatrix} -E^{(\varrho\sigma)} + E^{(\varrho 4)} + E^{(4\sigma)}, & 1, & 0 \\ 0 & , 1, & 0 \\ 1 & , 0, & 1 \end{vmatrix} > 0. \tag{71}$$

Vertauscht man die beiden letzten Spalten unter gleichzeitigem Wechsel des Ungleichheitszeichens, so wird die Determinante wieder symmetrisch.

Subtrahiert man die letzte Zeile mal $E^{(\varrho 4)}$ von der ersten und die letzte Spalte mal $E^{(4\sigma)}$ von der ersten, so erhält man

((72) durch Umnumerierung fortgefallen.)

$$(73) \qquad D(S) = \begin{vmatrix} -E^{(\varrho,\sigma)}, & -E^{(\varrho 4)}, & 1 \\ -E^{(4\sigma)}, & 0 \ , & 1 \\ 1 \ , & 1 \ , & 0 \end{vmatrix} < 0 .$$

Setzt man einen Teil der vier Zahlen $d^{(\varrho)}$ ständig gleich 0, so liefert dieselbe Schlußweise

$$(74) \qquad D'(S) < 0 ,$$

wo $D'(S)$ eine Hauptunterdeterminante von $D(S)$ bedeutet, in der die letzte Zeile und Spalte *nicht* fortgelassen sind. Aus (73) bis (70) folgt

$$(75) \qquad \begin{aligned} D(S) &= -\,|-E^{(\varrho\sigma)}+E^{(\varrho 4)}+E^{(4\sigma)}\,| \\ &= -\,|\,2\cdot Q(X_\lambda^{(\varrho)}-X_\lambda^{(4)},\ X_\nu^{(\sigma)}-X_\nu^{(4)})\,| \\ &= -\,8\cdot D(Q)\cdot|\,X_\lambda^{(\varrho)}-X_\lambda^{(4)}\,|^2 , \end{aligned}$$

worin die senkrechten Striche Determinanten bedeuten. Hierin ist nach (40)

$$(76) \qquad |\,X_\lambda^{(\varrho)}-X_\lambda^{(4)}\,| = \begin{vmatrix} X_\lambda^{(\varrho)}-X_\lambda^{(4)}, & 0 \\ 1 \ , & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_\lambda^{(\varrho)}, & X_\lambda^{(4)} \\ 1 \ , & 1 \end{vmatrix} = \pm 1 .$$

Das gibt in (75) eingesetzt

$$(77) \qquad D(S) = -\,8\,D(Q) .$$

Es werde angenommen, daß für ein Wertetripel ξ_λ

$$w(\xi_\lambda) = Q(X_\lambda^{(\tau)}-\xi_\lambda) = k \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, T)$$

wo $T < 4$. Für alle übrigen ganzzahligen Wertetripel x_λ sei

$$(78) \qquad Q(x_\lambda - \xi_\lambda) > w(\xi_\lambda) .$$

Dann soll ein Wertetripel $\bar{\xi}_\lambda$ so bestimmt werden, daß $w(\bar{\xi}_\lambda) > w(\xi_\lambda)$, woraus folgen wird, daß $w(\xi_\lambda) < W(Q)$.

Man bestimme ein Wertetripel $\bar{\Xi}_\lambda$ so, daß

$$(79) \qquad Q(X_\lambda^{(\tau)}-\bar{\Xi}_\lambda) = \bar{K} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, T)$$

Hierin soll sein

$$\bar{\Xi}_\lambda = \sum_\varrho \bar{\mathsf{M}}^{(\varrho)} X_\lambda^{(\varrho)} ,$$

$$(80) \qquad 1 = \sum_\varrho \bar{\mathsf{M}}^{(\varrho)} ,$$

$$(81) \qquad \bar{\mathsf{M}}^{(\varrho)} = 0 \qquad (\varrho > T)$$

(Für $T=1$ wird $\overline{\mathsf{M}}^{(1)}=1$, $\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)}=0$ für $\varrho>1$, also $\bar{\Xi}_\lambda = X_\lambda^{(1)}$, $\bar{K}=0$.)

Diese Gleichungen sind den Gleichungen (52) bis (67) völlig analog und wegen (74) eindeutig auflösbar. Es seien die $\mu^{(\varrho)}$ durch (46), (47) definiert. Es wird behauptet:

(82) $$Q(X_\lambda^{(\tau)}-\xi_\lambda)=Q(X_\lambda^{(\tau)}-\bar{\Xi}_\lambda)+Q(\bar{\Xi}_\lambda-\xi_\lambda)$$

oder

(83) $$k=\bar{K}+Q(\bar{\Xi}_\lambda-\xi_\lambda).$$

(Für $T=1$ trivial.) Man setze analog (60)

(84) $$\bar{K}=-\frac{1}{2}\{S(\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)})-2\bar{\Phi}\}=-\frac{1}{2}\{\bar{\Phi}-2\bar{\Phi}\}=\frac{1}{2}\bar{\Phi},$$

(85) $$k=-\frac{1}{2}\{S(\mu^{(\varrho)})-2\varphi\},$$

worin

(86) $$\varphi=J^{(\tau)}(\mu^{(\sigma)}) \qquad (\tau=1,2,\ldots,T).$$

Es wird

(87) $$Q(\bar{\Xi}_\lambda-\xi_\lambda)=-\frac{1}{2}S(\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)}-\mu^{(\varrho)})$$
$$=-\frac{1}{2}\{S(\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)}-2S(\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)},\mu^{(\sigma)})+S(\mu^{(\varrho)})\}.$$

Hierin setze man

(88) $$S(\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)})=\bar{\Phi}$$

und nach (86), (81), (80)

(89) $$S(\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)},\mu^{(\sigma)})=\sum_{\varrho}\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)}J^{(\varrho)}(\mu^{(\sigma)})=\sum_{\varrho=1}^{T}\overline{\mathsf{M}}^{(\varrho)}\cdot\varphi=\varphi.$$

Man erhält mit Rücksicht auf (84), (85)

(90) $$Q(\bar{\Xi}_\lambda-\xi_\lambda)=-\frac{1}{2}\{\bar{\Phi}-2\varphi+S(\mu^{(\varrho)})\}=k-\bar{K}.$$

Das ist aber (83) oder (82). Hieraus folgt für die Bilinearform

(91) $$Q(X_\lambda^{(\tau)}-\bar{\Xi}_\lambda,\bar{\Xi}_\mu-\xi_\mu)=0.$$

Es sei $l>1$ eine reelle Zahl; man setze

(92) $$\bar{\xi}_\lambda-\bar{\Xi}_\lambda=l(\xi_\lambda-\bar{\Xi}_\lambda).$$

Dann wird

(93) $$\bar{\xi}_\lambda-X_\lambda^{(\tau)}=l(\xi_\lambda-\bar{\Xi}_\lambda)+(\bar{\Xi}_\lambda-X_\lambda^{(\tau)}),$$

also wegen (91), (79), (83)

(94) $$\bar{k}=Q(\bar{\xi}_\lambda-X_\lambda^{(\tau)})=l^2Q(\xi_\lambda-\bar{\Xi}_\lambda)+\bar{K}>k;$$

$\bar{k}$ hat also für $\tau=1,2,\ldots,T$ denselben Wert.

Die Methode versagt, wenn sich $\xi_\lambda = \Xi_\lambda$ ergibt, da dann nach (83) $k = K$, ferner $\mu^{(\varrho)} = \mathsf{M}^{(\varrho)}$, $Q(\Xi_\lambda - \xi_\lambda) = 0$, $\varphi = \Phi$ wird. Nach (92) wird

$$\bar{\xi}_\lambda - \bar{\Xi}_\lambda = l(\xi_\lambda - \Xi_\lambda) = 0\,,$$

also nach (94) $\bar{k} = \bar{K} = k$.

Es tritt also keine Vergrößerung von k ein.

Da $T + 1 < 5$, haben die $T + 1$ linearen Gleichungen (47), (86) für die fünf Unbekannten $\mu^{(\sigma)}, \varphi$ unendlich viele Lösungen. Man wähle für $\bar{\mu}^{(\varrho)}, \bar{\varphi}$ eine von $\mu^{(\varrho)} = \mathsf{M}^{(\varrho)}$, $\varphi = \Phi$ verschiedene Lösung. In dieser sind auch nicht alle $\mu^{(\varrho)} = \mathsf{M}^{(\varrho)}$, da hieraus auch $\varphi = \Phi$ folgen würde und die Lösungen völlig identisch würden. Dann wird wegen (82) für $\tau = 1, 2, \ldots, T$

$$\bar{k} = Q(X_\lambda^{(\tau)} - \bar{\xi}_\lambda) = Q(X_\lambda^{(\tau)} - \Xi_\lambda) + Q(\Xi_\lambda - \bar{\xi}_\lambda) > Q(X_\lambda^{(\tau)} - \Xi_\lambda) = \bar{K} = k\,;$$

Man ersetze in (34) ξ_λ durch $\bar{\xi}_\lambda$ und lasse $\bar{\xi}_\lambda$ im Gebiete

$$\xi_\lambda - 1 \leqq \bar{\xi}_\lambda \leqq \xi_\lambda + 1 \tag{95}$$

variieren. Der Beweis mit Hilfe von (7) läßt sich so modifizieren, daß im ganzen nur endlich viele ganzzahlige Wertetripel x_λ die Bedingung

$$Q(x_\lambda - \bar{\xi}_\lambda) \leqq M \tag{96}$$

erfüllen für irgendein Wertetripel $\bar{\xi}_\lambda$, das (95) genügt. Das soll dazu benutzt werden, um (78) zu verschärfen. Man wähle ein festes M, das der Bedingung

$$M > w(\xi_\lambda) \tag{97}$$

genügt, bestimme die endlich vielen ganzzahligen Wertetripel x_λ, die (96) genügen, und braucht im folgenden nur sie zu berücksichtigen. Dann kann man $\varepsilon > 0$ so bestimmen, daß man anstatt (78) schreiben kann:

$$Q(x_\lambda - \xi_\lambda) > w(\xi_\lambda) + \varepsilon\,. \tag{98}$$

Man kann nun $l - 1$ so klein bestimmen, daß, wenn die drei Größen $\bar{\xi}$ durch (92) definiert sind, (96) erfüllt bleibt, was immer möglich, da $l =$ liefern würde $\bar{\xi}_\lambda = \xi_\lambda$, ferner, daß

$$\bar{k} - k = (l^2 - 1)\,Q(\xi_\lambda - \Xi_1) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{99}$$

oder

$$\bar{k} < k + \frac{\varepsilon}{3} = w(\xi_\lambda) + \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{100}$$

und schließlich, daß auf Grund der Stetigkeit von $Q(x_\lambda - \xi_\lambda)$ für all endlich vielen Systeme x_λ, die (96) genügen und von den $X_\lambda^{(\tau)}$ verschieden

$$|Q(x_\lambda - \bar{\xi}_\lambda) - Q(x_\lambda - \xi_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{101}$$

so daß nach (98), (100), (94)

$$(102)\quad \begin{cases} Q(x_\lambda - \bar{\xi}_\lambda) > Q(x_\lambda - \xi_\lambda) - \frac{\varepsilon}{3} > w(\xi_\lambda) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} \\ \qquad = w(\xi_\lambda) + \frac{2\varepsilon}{3} > \bar{k} + \frac{\varepsilon}{3} = Q(X_\lambda^{(\tau)} - \bar{\xi}_\lambda) + \frac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf (34) und (94), daß

$$(103)\qquad w(\bar{\xi}_\lambda) = \bar{k} > k.$$

Also ist

$$(104)\qquad w(\xi_\lambda) < W(Q).$$

$W(Q)$ kann also nur angenommen werden für ein Wertetripel Ξ_λ, das (52) genügt. Damit ist die Notwendigkeit von (37) und (39) bewiesen.

Es ist, noch immer nur unter der Voraussetzung (40), nicht aber (39),

$$(105)\quad \begin{cases} Q(\xi_\lambda - \Xi_\lambda) = -\frac{1}{2} S(\mu^{(\varrho)} - \mathsf{M}^{(\varrho)}) \\ \qquad = -\frac{1}{2}\{S(\mu^{(\varrho)}) - 2S(\mu^{(\varrho)}, \mathsf{M}^{(\sigma)}) + S(\mathsf{M}^{(\varrho)})\} \\ \qquad = -\frac{1}{2}\{S(\mu^{(\varrho)}) - 2\Phi + \Phi\} = -\frac{1}{2} S(\mu^{(\varrho)}) + \frac{1}{2}\Phi \\ \qquad = -\frac{1}{2} S(\mu^{(\varrho)}) + K. \end{cases}$$

Ich füge nunmehr zu der Voraussetzung (40) die Voraussetzung

$$K = Q(X_\lambda^{(\tau)} - \Xi_\lambda) = w(\Xi_\lambda)$$

hinzu; diese ist nach (34) dann und nur dann erfüllt, wenn

$$Q(x_\lambda - \Xi_\lambda) \geqq Q(X_\lambda^{(\tau)} - \Xi_\lambda) = K$$

oder, nach (105), wenn

$$-\frac{1}{2} S(m^{(\varrho)}) + K \geqq K$$

oder

$$(106)\qquad S(m^{(\varrho)} \leqq 0$$

für alle ganzzahligen $m^{(\varrho)}$, die (45) genügen.

§ 4.

Es soll gezeigt werden, daß die unendlich vielen Bedingungen (106) alle aus endlich vielen von ihnen folgen.

Es werde vorausgesetzt, daß

$$(107)\qquad S(1, 1, -1, 0) \leqq 0$$

gilt und sämtliche durch Permutation der Argumente hieraus entstehenden, zusammen 12 Bedingungen. (107) läßt sich auch schreiben

$$E_{13}+E_{23}\geqq E_{12}. \tag{108}$$

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß von den drei Summen

$$E_{12}+E_{34},\qquad E_{13}+E_{24},\qquad E_{14}+E_{23}$$

die erste das Maximum sei. Es sei also

$$E_{12}+E_{34}\geqq E_{13}+E_{24}, \tag{109}$$

$$E_{12}+P_{34}\geqq E_{14}+E_{23}. \tag{110}$$

Man bezeichne

$$E_{41}=E_a,\qquad E_{13}=E_b,\qquad E_{32}=E_c,\qquad E_{24}=E_d, \tag{111}$$

$$E_{12}=E_{\mathrm{II}}=E_{ad,bc};\qquad E_{34}=E_{\mathrm{III}}=E_{ab,cd}, \tag{112}$$

wobei es in (112) nur auf die Trennung der Indizes durch das Komma ankommt. Sodann bestimme man die Größen g_{pq}, wo p und q die Indizes a, b, c, d durchlaufen.

$$g_{pq}=g_{qp},\qquad g_{pp}=0.$$

Man setze nämlich

$$2g_{pq}=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ a & 0, & E_a+E_b-E_{\mathrm{III}}, & E_{\mathrm{II}}+E_{\mathrm{III}}-E_b-E_d, & E_a+E_d-E_{\mathrm{II}}, \\ b & E_a+E_b-E_{\mathrm{III}}, & 0, & E_b+E_c-E_{\mathrm{II}}, & E_{\mathrm{II}}+E_{\mathrm{III}}-E_c-E_d, \\ c & E_{\mathrm{II}}+E_{\mathrm{III}}-E_b-E_d, & E_b+E_c-E_{\mathrm{II}}, & 0, & E_c+E_d-E_{\mathrm{III}}, \\ d & E_a+E_d-E_{\mathrm{II}}, & E_{\mathrm{II}}+E_{\mathrm{III}}-E_a-E_c, & E_c+E_d-E_{\mathrm{III}}, & 0 \end{array} \tag{113}$$

Es werden wegen (108), (109), (110) sämtliche

$$g_{pq}\geqq 0. \tag{114}$$

Es ergibt sich

$$E_p=\sum_q g_{pq}, \tag{115}$$

$$E_{\mathrm{II}}=g_{ac}+g_{bd}+g_{ab}+g_{cd} \tag{116}$$

$$E_{\mathrm{III}}=g_{ac}+g_{bd}+g_{ad}+g_{bc}. \tag{117}$$

Setzt man (115) bis (117) in (51) ein und ordnet man nach den g_{pq}, so erhält man

$$\begin{aligned} S(m^{(\varrho)})= \quad & 2g_{ab}m^{(1)}(m^{(2)}+m^{(3)}+m^{(4)}) \\ & +2g_{ac}(m^{(1)}+m^{(3)})(m^{(2)}+m^{(4)}) \\ & +2g_{ad}m^{(4)}(m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(3)}) \\ & +2g_{bc}m^{(3)}(m^{(1)}+m^{(2)}+m^{(4)}) \\ & +2g_{bd}(m^{(1)}+m^{(4)})(m^{(2)}+m^{(3)}) \\ & +2g_{cd}m^{(2)}(m^{(1)}+m^{(3)}+m^{(4)}). \end{aligned} \tag{118}$$

Wenn x und y ganze Zahlen und

$$x + y = 1, \tag{119}$$

so ist

$$xy \leqq 0, \tag{120}$$

weil nicht beide von 0 verschieden und von gleichem Vorzeichen sein können. Das wende man in (118) mit Rücksicht auf (45) an und erhält (106). Die Bedingungen (107) sind also hinreichend dafür, daß (106) besteht. Bedeuten die g_{pq} irgend sechs Größen, die (114) genügen, und definiert man die $E^{(\varrho\sigma)}$ durch (115) bis (117), so ist wegen (118) die Ungleichung (106) erfüllt, die mit (39) gleichbedeutend war. Die Form (106) ist für Variable, die (48) genügen, stets definit. Denn wenn

$$x + y = 0,$$

so ist

$$xy = -x^2 \leqq 0.$$

Wenn also (48) gilt, so folgt aus (118)

$$S(\delta^{(\varrho)}) \leqq 0.$$

Für diesen Paragraphen erfordert das binäre Problem eine besondere Behandlung. Es werde anstatt (107) vorausgesetzt, daß

$$\hat{S}(1, 1, -1) \leqq 0 \tag{121}$$

gilt und sämtliche durch Permutation hieraus entstehenden, zusammen drei Bedingungen, die sich wieder in der Form (108) schreiben lassen. Die Form $\hat{S}(\hat{\mu}^{(\alpha)})$ hängt von drei Variablen ab, die der Bedingung

$$\sum_{\alpha} \hat{\mu}^{(\alpha)} = 1$$

genügen. Die Indizes 1, 2, 3 mögen zyklisch mod 3 betrachtet werden. Man setze

$$2\hat{g}_\alpha = \hat{E}^{(\alpha+1,\alpha)} + \hat{E}^{(\alpha-1,\alpha)} - \hat{E}^{(\alpha+1,\alpha-1)} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

dann wird nach (108)

$$\hat{g}_\alpha \geqq 0, \tag{121a}$$

$$\hat{E}^{(\alpha,\alpha+1)} = \hat{g}_\alpha + \hat{g}_{\alpha+1} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$\hat{S}(\hat{m}^{(\alpha)}) = 2\sum_{\alpha} \hat{g}_\alpha \hat{m}^{(\alpha)}(\hat{m}^{(\alpha+1)} + \hat{m}^{(\alpha-1)}). \tag{122}$$

Aus (119) und (120) folgt also

$$\hat{S}(\hat{m}^{(\alpha)}) \leqq 0. \tag{123}$$

Bedeuten die g_α irgend drei Größen, die (121a) genügen, so ist (123) er-

füllt; diese Bedingung entspricht aber (106), das mit (39) gleichbedeutend war.

§ 5.

Dieser Paragraph hat für das binäre Problem kein Analogon.

Es ist nach (49) und (69)

$$x_\lambda - \xi_\lambda = \sum_{\varrho}^{\mathrm{II}} (X_\lambda^{(\varrho)} - X_\lambda^{(4)})\,\delta^{(\varrho)}. \tag{124}$$

Die Determinante der Substitution ist nach (76) gleich ± 1. Führt man drei neue Variable ein durch die Substitution

$$\begin{cases} \delta^{(1)} = \nu_{\mathrm{I}} + \nu_{\mathrm{II}} \quad , \\ \delta^{(2)} = \nu_{\mathrm{I}} - \nu_{\mathrm{II}} \quad , \\ \delta^{(3)} = -\nu_{\mathrm{I}} \quad + \nu_{\mathrm{III}}, \end{cases} \tag{125}$$

so ist deren Determinante gleich -2. Die zusammengesetzte Substitution

$$\begin{aligned} x_\lambda - \xi_\lambda &= \nu_{\mathrm{I}}(X_\lambda^{(1)} + X_\lambda^{(2)} - X_\lambda^{(3)} - X_\lambda^{(4)}) + \nu_{\mathrm{II}}(X_\lambda^{(1)} - X_\lambda^{(2)}) \\ &\quad + \nu_{\mathrm{III}}(X_\lambda^{(3)} - X_\lambda^{(4)}) = \sum_{L} h_{\lambda L}\nu_L = H_\lambda(\nu_L), \end{aligned} \tag{126}$$

hat mithin die Determinante

$$|h_{\lambda L}| = \pm 2. \tag{127}$$

L durchläuft die Indizes I, II, III. $h_{\lambda L}$ ist zur abgekürzten Bezeichnung der Koeffizienten, H_λ der Linearformen eingeführt. Setzt man für $x_\lambda - \xi_\lambda$ ganze Zahlen, so kann bei der Auflösung nach den ν_L der Nenner 2 auftreten. Es ist

$$\begin{cases} H_\lambda\left(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right) = X_\lambda^{(1)} - X_\lambda^{(4)}, \\ H_\lambda\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right) = X_\lambda^{(2)} - X_\lambda^{(4)}, \\ H_\lambda(0, \quad 0, \quad 1) = X_\lambda^{(3)} - X_\lambda^{(4)}. \end{cases} \tag{128}$$

Aus diesen Größen lassen sich ganzzahlig alle ganzzahligen $x_\lambda - \xi_\lambda$ zusammensetzen, da (124) wegen (76) ganzzahlig auflösbar ist. Aus (128) folgt, daß, wenn die $x_\lambda - \xi_\lambda$ ganzzahlig sind,

$$2\nu_{\mathrm{I}} \equiv 2\nu_{\mathrm{II}} \equiv 2\nu_{\mathrm{III}} \mod 2 \tag{129}$$

wird. (126) bewirkt die Substitution der quadratischen Form

$$Q(x_\lambda - \xi_\lambda) = T(\nu_L).$$

Es ist wegen (127)

$$4\,D(Q) = D(T). \tag{130}$$

Die Berechnung von T wird zweckmäßig folgendermaßen ausgeführt. Die Gleichungen (125) sind wegen (48) zu ergänzen durch

$$\delta^{(4)} = -\nu_{\mathrm{I}} - \nu_{\mathrm{III}}.$$

Unter Benutzung von (118) erhält man

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} T(\nu_L) = & -\frac{1}{2} S(\delta^{(\varrho)}) \\ = & \; g_{ab}(\nu_{\mathrm{I}}+\nu_{\mathrm{II}})^2 + g_{cd}(\nu_{\mathrm{I}}-\nu_{\mathrm{II}})^2 \\ & + g_{ac}(\nu_{\mathrm{II}}+\nu_{\mathrm{III}})^2 + g_{bd}(\nu_{\mathrm{II}}-\nu_{\mathrm{III}})^2 \\ & + g_{ad}(\nu_{\mathrm{I}}+\nu_{\mathrm{III}})^2 + g_{bc}(\nu_{\mathrm{I}}-\nu_{\mathrm{III}})^2 \\ = & \; E_{\mathrm{I}}\nu_{\mathrm{I}}^2 + E_{\mathrm{II}}\nu_{\mathrm{II}}^2 + E_{\mathrm{III}}\nu_{\mathrm{III}}^2 \\ & + (E_a + E_b - E_c - E_d)\nu_{\mathrm{I}}\nu_{\mathrm{II}} \\ & + (E_a + E_c - E_b - E_d)\nu_{\mathrm{II}}\nu_{\mathrm{III}} \\ & + (E_a + E_d - E_b - E_c)\nu_{\mathrm{I}}\nu_{\mathrm{III}}. \end{aligned}\right.$$

Hierin ist neu eingeführt

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{I}} = T(1,0,0) &= Q(X_\lambda^{(1)} + X_\lambda^{(2)} - X_\lambda^{(3)} - X_\lambda^{(4)}) \\ &= E_a + E_b + E_c + E_d - E_{\mathrm{II}} - E_{\mathrm{III}} \\ &= g_{ab} + g_{cd} + g_{ad} + g_{bc}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$(131\mathrm{a})\qquad E_a + E_b + E_c + E_d = E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} + E_{\mathrm{III}}.$$

Ein Zeichenwechsel eines ν_L bewirkt in (131) die Bevorzugung eines anderen Index statt a. Irgendwelche Vertauschungen der vier Indizes a, b, c, d bewirken in $T(\nu_L)$ nur Vertauschungen und Zeichenwechsel der Veränderlichen. Aus $S(\mu^{(\varrho)})$ entstehen dabei 24 äquivalente Formen, von denen je 8 durch Vertauschung der Veränderlichen ineinander übergehen, also durch (65) und (67) zu derselben Größe K führen. Es gibt also drei verschiedene Größen K. Jedes Koeffizientenschema enthält alle vier Größen E_p und zwei von den drei Größen E_L. Die drei Größen K mögen nach dem im Koeffizientenschema *fehlenden* E_L mit K_L bezeichnet werden.

§ 6.

Denkt man sich in (34) das Wertetripel X_λ festgehalten, so sind, wenn x_λ alle ganzzahligen Wertetripel durchläuft, die unendlich vielen Bedingungen (34) erfüllt als Folge von endlich vielen unter ihnen, wie im folgenden gezeigt werden soll. Es sei analog (44), (45)

$$X_\lambda = \sum_\varrho M^{(\varrho)} X_\lambda^{(\varrho)},$$

$$1 = \sum_\varrho M^{(\varrho)},$$

dann läßt sich (34) auch schreiben

$$S(M^{(\varrho)} - \mu^{(\varrho)}) \geqq S(m^{(\varrho)} - \mu^{(\varrho)}) \tag{132}$$

für alle ganzzahligen $m^{(\varrho)}$, die (45) genügen. Setzt man nach (126)

$$X_\lambda - \xi_\lambda = H_\lambda(\mathsf{N}_L),$$
$$x_\lambda - X_\lambda = H_\lambda(n_L),$$

so wird

$$\left\{\begin{aligned} x_\lambda - \xi_\lambda &= H_\lambda(\nu_L) = (X_\lambda - \xi_\lambda) + (x_\lambda - X_\lambda) \\ &= H_\lambda(\mathsf{N}_L) + H_\lambda(n_L) = H_\lambda(\mathsf{N}_L + n_L), \end{aligned}\right. \tag{133}$$

also

$$\nu_L = \mathsf{N}_L + n_L.$$

(34) läßt sich auch schreiben

$$T(\mathsf{N}_L) \leqq T(\nu_L) = T(\mathsf{N}_L + n_L). \tag{134}$$

Es sei (134) erfüllt für folgende n_L:

$$n_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{II}}, n_{\mathrm{III}} = \pm 1, 0, 0 \tag{135}$$

mit allen Vertauschungen und

$$n_L = \pm \frac{1}{2} \tag{136}$$

mit allen Vorzeichenkombinationen. (135) liefert sechs, (136) acht, zusammen 14 Bedingungen. Es soll das Bestehen von (134) für ein beliebiges gegebenes Wertetripel von Hälften ganzer Zahlen n_L, die (129) genügen, bewiesen werden. Nötigenfalls durch eine Umänderung der Bezeichnung von a, b, c, d, die eine Umbenennung von I, II, III und Umbenennung von ν_L in $-\nu_L$ nach sich ziehen kann, kann man stets erreichen, daß für das gegebene Wertetripel

$$|n_{\mathrm{III}}| \geqq |n_{\mathrm{I}}| \geqq |n_{\mathrm{II}}|$$

und

$$n_{\mathrm{III}} \geqq 0; \qquad n_{\mathrm{I}} \geqq 0$$

wird. Setzt man diese Werte in (125) ein, so ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} m^{(1)} - M^{(1)} = d^{(1)} &= n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} &&\geqq 0, \\ m^{(2)} - M^{(2)} = d^{(2)} &= n_{\mathrm{I}} - n_{\mathrm{II}} &&\geqq 0, \\ m^{(3)} - M^{(3)} = d^{(3)} &= -n_{\mathrm{I}} &+ n_{\mathrm{III}} &\geqq 0. \end{aligned}\right. \tag{137}$$

Die Bedingung (34) bleibt erhalten, wenn man zu X_λ, x_λ, ξ_λ dasselbe ganzzahlige Wertetripel addiert. Also kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$X_\lambda = X_\lambda^{(4)} \tag{138}$$

setzen. Dann kommen wegen (128) und (133) unter den 14 Bedingungen (135) und (136) die drei Bedingungen

$$Q(X_\lambda^{(4)} - \xi_\lambda) \leqq Q(X_\lambda^{(\varrho)} - \xi_\lambda) \qquad (\varrho = 1, 2, 3) \tag{139}$$

vor oder

$$S(M^{(4\sigma)} - \mu^{(\sigma)}) \geqq S(M^{(\varrho\sigma)} - \mu^{(\sigma)}) \qquad (\varrho = 1, 2, 3) \tag{140}$$

oder nach (60), wo M durch μ zu ersetzen,

$$J^{(4)}(\mu^{(\sigma)}) \leqq J^{(\varrho)}(\mu^{(\sigma)}) \qquad (\varrho = 1, 2, 3) \tag{141}$$

oder

$$J^{(\varrho)}(\mu^{(\sigma)}) - J^{(4)}(\mu^{(\sigma)}) \geqq 0 \qquad (\varrho = 1, 2, 3). \tag{142}$$

Die Spezialisierung (138) liefert in (137) mit Rücksicht auf (55)

$$m^{(\varrho)} \geqq 0 \qquad (\varrho = 1, 2, 3). \tag{143}$$

Ebenso lautet die allgemein zu beweisende Bedingung (132) spezialisiert

$$-2J^{(4)}(\mu^{(\sigma)}) \geqq S(m^{(\varrho)}) - 2\sum_{\varrho} m^{(\varrho)} J^{(\varrho)}(\mu^{(\sigma)}). \tag{144}$$

Nun folgt aber aus (142), (143) und (106) andrerseits

$$2\sum_{\varrho} m^{(\varrho)}(J^{(\varrho)}(\mu^{(\sigma)}) - J^{(4)}(\mu^{(\sigma)})) \geqq 0 \geqq S(m^{(\varrho)}). \tag{145}$$

Mit Rücksicht auf (45) folgt hieraus (144); mithin ist (132) oder

$$Q(X_\lambda^{(4)} - \xi_\lambda) \leqq Q(x_\lambda - \xi_\lambda) \tag{146}$$

bewiesen.

Die Vergrößerung von $Q(X_\lambda^{(4)} - \xi_\lambda)$ entsprechend (82) bis (103), wobei (146) erhalten bleibt, führt zu der Bedingung (145) mit dem Gleichheitszeichen. Da die Gleichung

$$x_\lambda = X_\lambda = X_\lambda^{(4)},$$

nicht bestehen kann, so ist mindestens einer der drei Werte m_1, m_2, m_3 von Null verschieden, also ist für ein bestimmtes ϱ nach (143)

$$m^{(\varrho)} > 0,$$

also für dasselbe ϱ nach (142), (143), (145)

$$J^{(\varrho)}(\mu^{(\sigma)}) - J^{(4)}(\mu^{(\sigma)}) = 0;$$

also gilt für dasselbe ϱ in (142) rückwärts bis (139) das Gleichheitszeichen, also ist wegen (128)

$$T(\mathsf{N}_L) = T(\mathsf{N}_L + n_L),$$

wo n_L eines der 14 Wertsysteme (135), (136) bedeutet. Die entsprechende allgemeine Ungleichheitsbedingung (139) lautet

$$T(\mathsf{N}_L) \leqq T(\mathsf{N}_L + n_L)$$

oder

$$0 \leqq 2\,T(\mathsf{N}_L, n_{\bar{L}}) + T(n_L). \tag{146a}$$

Sollte mehr als ein m_ϱ von Null verschieden sein, so führt derselbe Schluß dazu, daß mindestens zwei verschiedene Bedingungen (146a) gelten. Die Fortsetzung des Vergrößerungsverfahrens führt also in jedem Falle zu einem Wertsysteme, für das zwei verschiedene Bedingungen (146a) gelten. Es sind $\frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ Kombinationen dieser Bedingungen zu zweien möglich. Es soll gezeigt werden, daß von den 91 Kombinationen nur 36 vorkommen können.

Es gilt allgemein folgendes. Es seien h Bedingungen ($h \geqq 3$) von der Form

$$0 \leqq A_\eta(\mathsf{N}_L) + B_\eta \qquad (\eta = 1, 2, \ldots, h) \tag{146b}$$

gegeben. Es sei ferner gelungen, h Koeffizienten λ_η so zu bestimmen, daß

$$\lambda_1 A_1(\mathsf{N}_L) + \lambda_2 A_2(\mathsf{N}_L) = \sum_{\eta=3}^{h} \lambda_\eta A_\eta(\mathsf{N}_L). \tag{146c}$$

Hierin seien λ_1 und λ_2 nicht beide gleichzeitig Null und $\lambda_\eta \geqq 0$ für $\eta \geqq 3$.

Für diejenigen Wertsysteme N_L, für die gleichzeitig

$$\begin{cases} 0 = A_1(\mathsf{N}_L) + B_1 \\ 0 = A_2(\mathsf{N}_L) + B_2 \end{cases} \tag{146d}$$

und sämtliche Bedingungen (146b) erfüllt sind, muß sein

$$\lambda_1(A_1(\mathsf{N}_L) + B_1) + \lambda_2(A_2(\mathsf{N}_L) + B_2) = 0 \leqq \sum_{\eta=3}^{h} \lambda_\eta(A_\eta(\mathsf{N}_\eta) + B_\eta) \tag{146e}$$

oder wegen (146c)

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \leqq \sum_{\eta=3}^{h} \lambda_\eta B_\eta. \tag{146f}$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt sein sollte, so kommen unter den Wertesystemen N_L, die sämtlichen Bedingungen (146b) genügen, keine vor, für die die beiden Gleichungen (146d) gleichzeitig erfüllt sind. Wenn in (146f) das Gleichheitszeichen gilt, so gilt es auch in (146e). Dann können also sämtliche Bedingungen (146b) und die Gleichungen (146d) höchstens dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn für jedes $\eta \geqq 3$, für das

$$\lambda_\eta > 0$$

ist,

$$A_\eta(\mathsf{N}_L) + B_\eta = 0$$

wird.

Es seien speziell sechs Bedingungen (146b) von der Form

$$0 \leqq \pm A_\eta(\mathsf{N}_L) + B_\eta \qquad (\eta = 1, 2, 3) \tag{146g}$$

gegeben. Es sei

$$\sum_\eta A_\eta(\mathsf{N}_L) = 0, \tag{146h}$$

ferner sei

$$0 < B_\eta \leqq B_{\eta-1} + B_{\eta+1} \qquad (\eta = 1, 2, 3), \tag{146i}$$

wobei die Indizes 1, 2, 3 zyklisch mod 3 betrachtet werden. Dann ist

$$A_\eta = -A_{\eta-1} - A_{\eta+1}. \tag{146j}$$

Wenn in (146i) für alle η das Ungleichheitszeichen gilt, entsteht ein Widerspruch zu (146f). Es können also, wenn sämtliche Bedingungen (146g) erfüllt sind, nicht gleichzeitig die Gleichungen

$$0 = -A_{\eta-1}(\mathsf{N}_L) + B_{\eta-1}$$

und

$$0 = -A_{\eta+1}(\mathsf{N}_L) + B_{\eta+1}$$

erfüllt sein, die kurz mit $(-A_{\eta-1})$ und $(-A_{\eta+1})$ bezeichnet werden mögen (ebenso nicht gleichzeitig $(A_{\eta-1})$ und $(A_{\eta+1})$). Die sechs Gleichungen (A_η) und $(-A_\eta)$ bilden $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Paare, von denen also sechs unzulässig sind. Ferner sind die drei Paare (A_η), $(-A_\eta)$ unzulässig, da aus ihnen $B_\eta = 0$ folgen würde. Es bleiben zulässig sechs Paare, die sich als Nachbarn in folgendem Zyklus vorfinden:

$$\{(A_1), (-A_3), (A_2), (-A_1), (A_3), (-A_2)\}. \tag{146k}$$

Gilt für ein η in (146i) das Gleichheitszeichen, so folgt wegen (146j) aus dem gleichzeitigen Bestehen von $(-A_{\eta-1})$ und $(-A_{\eta+1})$ das Bestehen von (A_η); also sind im Zyklus (146k) drei aufeinander folgende Gleichungen erfüllt.

Man setze

$$M_L = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ für } \begin{cases} M \neq L \\ M = L \end{cases} \qquad (L, M = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}), \tag{146l}$$

ferner

$$\left\{ p_L = \begin{array}{c|ccc} p = & L=\mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ a & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ c & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ d & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ b & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{array} \right\}. \tag{146m}$$

Es ist

$$T(M_L) = T(-M_L) = E_M \qquad (M = \text{I, II, III}) \tag{146n}$$

$$T(p_L) = T(-p_L) = E_p \qquad (p = a, b, c, d). \tag{146o}$$

Ferner ist

$$\sum_p p_L = 0.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{I}_L = -a_L - c_L = b_L + d_L \\ \text{II}_L = -a_L - d_L = b_L + c_L \\ \text{III}_L = -a_L - b_L = c_L + d_L. \end{array}\right. \tag{146p}$$

Hieraus folgt

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I}_L + \text{II}_L = b_L - a_L; & \text{I}_L - \text{II}_L = d_L - c_L; \\ \text{I}_L + \text{III}_L = d_L - a_L; & \text{I}_L - \text{III}_L = b_L - c_L; \\ \text{II}_L + \text{III}_L = c_L - a_L; & \text{II}_L - \text{III}_L = b_L - d_L. \end{array}\right. \tag{146q}$$

Allgemein gilt die Gleichung zwischen den Bilinearformen

$$T(\mathsf{N}_L, n_{\bar{L}}) + T(\mathsf{N}_L, n'_{\bar{L}}) = T(\mathsf{N}_L, n_{\bar{L}} + n'_{\bar{L}}),$$

insbesondere

$$T(\mathsf{N}_L, -n_{\bar{L}}) = -T(\mathsf{N}_L, n_{\bar{L}}).$$

Durch Einsetzen der Werte $M_{\bar{L}}$ und $p_{\bar{L}}$ für $n_{\bar{L}}$ in die Bilinearform $T(\mathsf{N}_L, n_{\bar{L}})$ erhält man also aus den Gleichungen (146p) und (146q) analoge Gleichungen zwischen den Bilinearformen, die ich kurz die „bilinearen“ Gleichungen (146p) und (146q) nennen will. Die „bilinearen“ Gleichungen (146p) liefern sechs Gleichungen von der Form (146h). Bezeichnet man die Gleichung

$$0 = 2T(\mathsf{N}_L, M_{\bar{L}}) + T(M_{\bar{L}})$$

abgekürzt durch das Symbol M (entsprechend $-M$, p, $-p$), so sind unzulässig die drei Gleichungspaare $M, -M$ und die vier Gleichungspaare $p, -p$. Den Bedingungen (146i) entsprechen die sämtlichen 18 aus (108) durch Vertauschung und Zulassung von E_{I} entstehenden Bedingungen. Es sind 36 weitere Gleichungspaare im allgemeinen unzulässig, d. h. nur zulässig, wenn in den Zyklen

$$\left\{\begin{array}{llllll} (\text{I}, & -c, & a, & -\text{I}, & c, & -a) \\ (\text{I}, & d, & -b, & -\text{I}, & -d, & b) \\ (\text{II}, & -d, & a, & -\text{II}, & d, & -a) \\ (\text{II}, & c, & -b, & -\text{II}, & -c, & b) \\ (\text{III}, & -b, & a, & -\text{III}, & b, & -a) \\ (\text{III}, & d, & -c, & -\text{III}, & -d, & c) \end{array}\right. \tag{146r}$$

drei aufeinander folgende Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind. Legt man die „bilinearen" Gleichungen (146q) zugrunde, so widersprechen die sechs aus (109) und (110) durch Vertauschung und Zulassung von E_{I} entstehenden Bedingungen

$$(146\mathrm{s}) \quad \begin{cases} E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} \geqq E_a + E_b; & E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} \geqq E_c + E_d; \\ E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{III}} \geqq E_a + E_d; & E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{III}} \geqq E_b + E_c; \\ E_{\mathrm{II}} + E_{\mathrm{III}} \geqq E_a + E_c; & E_{\mathrm{II}} + E_{\mathrm{III}} \geqq E_b + E_d; \end{cases}$$

der Bedingung (146f), wenn in ihnen das Ungleichheitszeichen gilt. Die 12 Gleichungspaare $\pm L$, $\pm M$ sind also im allgemeinen unzulässig, d. h. nur zulässig, wenn in einer Bedingung (146s) das Gleichheitszeichen gilt. Dann gelten aber, wie oben gezeigt, für die beiden in (146q) rechts stehenden Symbole die Gleichungen p und $-q$. Diese finden sich aber bereits als Nachbarn unter den Zyklen (146r) vor. Im ganzen sind also $91 - 3 - 4 - 36 - 12 = 36$ Gleichungspaare allgemein zulässig; das sind also nur die benachbarten in den Zyklen (146r).

Bei weiterer Fortsetzung des Vergrößerungsverfahrens (82) bis (103) gelangt man zu einem Wertetripel N_L, das mindestens drei linear unabhängigen unter den 14 Gleichungen $\pm M$, $\pm p$ genügt. Es soll gezeigt werden, daß sich unter den Gleichungen, denen das Wertetripel N_L genügt, drei so auswählen lassen, daß je zwei von ihnen in den Zyklen (146r) als Nachbarn vorkommen. Diese Bedingung muß nach dem Obigen erfüllt sein, wenn die Zahl der Gleichungen nicht größer als drei ist. Ist umgekehrt diese Bedingung noch nicht erfüllt, so gibt es nach den behandelten Ausnahmefällen weitere Gleichungen $\pm M$, $\pm p$, denen das Wertetripel N_L genügt. Sind zwei verschiedene M, z. B. I, II erfüllt, so sind, wie oben gezeigt, b und $-a$ erfüllt, die nach (146r) untereinander und mit I, ebenso auch mit II benachbart sind. Unter den acht Gleichungen $\pm p$ können nicht drei zu je zweien benachbart sein. Eine solche Gleichung, z. B. a, kommt in drei Zyklen vor, hat also sechs Nachbarn, von denen drei zu den $\pm M$ gehören.

Je zwei der übrigen Nachbarn, z. B. $-c$, $-d$ sind aber untereinander *nicht* benachbart, können also nur gleichzeitig erfüllt sein, wenn auch noch $-$ III erfüllt ist. Unter allen Umständen ist also eine Gleichung $\pm M$ erfüllt. Diese kommt in zwei Zyklen vor, hat also in jedem Zyklus ein Paar benachbarte Gleichungen, von denen wieder jede mit jeder Gleichung des anderen Paares benachbart ist. Wegen der linearen Unabhängigkeit können nicht alle drei Gleichungen demselben Zyklus angehören. Man findet also in jedem Falle eines der folgenden 24 Tripel von Gleichungen, von denen je zwei in den Zyklen (146r) benachbart sind:

$$(146\,\mathrm{t}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\ \mathrm{I}, -c, b), & (\ \mathrm{I}, -c, d), \\ (\ \mathrm{I}, -a, b), & (\ \mathrm{I}, -a, d), \\ (\ \mathrm{II}, -a, b), & (\ \mathrm{II}, -d, c), \\ (\ \mathrm{II}, -d, b), & (\ \mathrm{II}, -d, c), \\ (\mathrm{III}, -a, c), & (\mathrm{III}, -a, d), \\ (\mathrm{III}, -b, c), & (\mathrm{III}, -b, d) \end{array} \right.$$

und die zwölf durch Wechsel sämtlicher Vorzeichen hieraus entstehenden. Bei Beachtung von (146 m) ergeben sich die Argumente der linken Seiten von (128) als $-a_L$, d_L, III_L und sämtliche anderen Gleichungstripel von (146 t) als durch Vertauschung und Vorzeichenwechsel der n_L hieraus entstanden. Nach der Bemerkung am Schlusse des § 5 kann also das Vergrößerungsverfahren (82) bis (103) unter Beachtung von (146) nur zu einer der drei Größen K_L führen. Also ist

$$(147) \qquad W(Q) = \operatorname*{Max}_{L=\mathrm{I,\,II,\,III}} K_L.$$

Den diesem Paragraphen entsprechenden Teil des binären Problems werde ich erst in § 8 behandeln.

§ 7.

Es soll nunmehr mit Hilfe der in §§ 1 und 2 behandelten Reduktion der quadratischen Formen gezeigt werden, daß sich (40) und (107) gleichzeitig erfüllen lassen. Auf die Größenbeziehung (18) kommt es jetzt gar nicht mehr an; ich behalte mir vor, die Indizes 1, 2, 3 ohne Rücksicht auf (18) zu vertauschen.

Fall (A). Es mögen die für die Reduktion hinreichenden Bedingungen (30) und statt (29)

$$(148) \qquad |B_{\alpha\beta}| \leqq \frac{1}{2} B_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \alpha \neq \beta)$$

gelten. Man vertausche die Indizes 1, 2, 3 so, daß

$$(149) \qquad B_{12} \leqq B_{13}$$

und

$$(150) \qquad B_{12} \leqq B_{23}$$

wird. Sodann setze man

$$X_\lambda^{(\varrho)} = \begin{array}{c} \lambda = \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varrho = 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Es ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_\lambda^{(\varrho)} \\ 1 \end{vmatrix} = 1,$$

also (40) erfüllt. Es wird

$$E^{(\alpha 4)} = B_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{151}$$

$$E^{(\alpha\beta)} = B_{\alpha\alpha} - 2B_{\alpha\beta} + B_{\beta\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{152}$$

Es ist nach (148)

$$(B_{\alpha\alpha} - 2B_{\alpha\beta} + B_{\beta\beta}) + B_{\alpha\alpha} - B_{\beta\beta} = 2B_{\alpha\alpha} - 2B_{\alpha\beta} \geqq 0, \tag{153}$$

nach (30)

$$B_{\alpha\alpha} + B_{\beta\beta} - (B_{\alpha\alpha} + B_{\beta\beta} - 2B_{\alpha\beta}) = 2B_{\alpha\beta} \geqq 0; \tag{154}$$

es ist also

$$E^{(\alpha 4)} + E^{(\beta 4)} - E^{(\alpha\beta)} \geqq 0 \tag{155}$$

und

$$E^{(\alpha 4)} - E^{(\beta 4)} + E^{(\alpha\beta)} \geqq 0. \tag{156}$$

Wenn α, β, γ die Werte 1, 2, 3 in irgendeiner Reihenfolge bedeuten, so ist nach (148)

$$\begin{aligned} E^{(\alpha\beta)} + E^{(\beta\gamma)} - E^{(\alpha\gamma)} &= 2B_{\beta\beta} + 2B_{\alpha\gamma} - 2B_{\alpha\beta} - 2B_{\beta\gamma} \\ &\geqq (B_{\beta\beta} - 2B_{\alpha\beta}) + (B_{\beta\beta} - 2B_{\beta\gamma}) \geqq 0. \end{aligned} \tag{157}$$

Es sind also alle zwölf Bedingungen (107) erfüllt. Ferner ist (109) wegen (149), (110) wegen (150) erfüllt. Aus (113) ergibt sich

$$g_{pq} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0, & B_{11} - B_{13}, & B_{13} - B_{12}, & B_{12} \\ B_{11} - B_{13}, & 0, & B_{33} + B_{12} - B_{13} - B_{23}, & B_{23} - B_{12} \\ B_{13} - B_{12}, & B_{33} + B_{12} - B_{13} - B_{23}, & 0, & B_{22} - B_{23} \\ B_{12}, & B_{23} - B_{12}, & B_{22} - B_{23}, & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{}$$

Fall (B). Es seien die für die Reduktion hinreichenden Bedingungen (31), (148) und anstatt (33)

$$|B_{12}| + |B_{23}| + |B_{31}| \leqq \frac{1}{2} B_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} B_{\beta\beta}$$

erfüllt. Man setze

$$X_\lambda^{(\varrho)} = \begin{array}{c} \\ \lambda = 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varrho = 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dann wird die Determinante

$$\left| \begin{matrix} X_\lambda^{(\varrho)} \\ 1 \end{matrix} \right| = 1,$$

also ist (40) erfüllt. Es wird

(159) $$E^{(\varrho\sigma)} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0, & B_{22}+B_{33}-2|B_{23}|, & B_{33}, & B_{11} \\ 2 & B_{22}+B_{33}-2|B_{23}|, & 0, & B_{22}, & B_{11}+B_{22}+B \\ & & & & -2|B_{12}|-2|B_{13}|- \\ 3 & B_{33}, & B_{22}, & 0, & B_{11}+B_{33}-2|B \\ 4 & B_{11}, & B_{11}+B_{22}+B_{33} & B_{11}+B_{33}-2|B_{13}|, & 0 \\ & & -2|B_{12}|-2|B_{13}|-2|B_{23}| & & \end{array}$$

(107) ist für $m_2 = 0$ und $m_4 = 0$ wegen (153) und (154) erfüllt. Es ist nach dem Ende von (157)

$$E^{(23)} + E^{(24)} - E^{(34)} = 2B_{22} - 2|B_{12}| - 2|B_{23}| \geqq 0,$$
$$E^{(23)} - E^{(24)} + E^{(34)} = 2|B_{12}| + 2|B_{23}| \geqq 0;$$

ferner nach (148)

$$-E^{(23)} + E^{(24)} + E^{(34)} = 2B_{11} + 2B_{33} - 2|B_{12}| - 2|B_{23}| - 4|B_{13}|$$
$$= (B_{11} - 2|B_{12}|) + (B_{11} - 2|B_{13}|) + (B_{33} - 2|B_{13}|) + (B_{33} - 2|B_{23}|) \geqq 0.$$

Die Indizes 1 und 2 treten in (159) symmetrisch auf. Es sind also die zwölf Bedingungen (107) erfüllt. Es ergibt sich nach (113)

(160) $$g_{pq} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ a & 0, & |B_{13}|, & |B_{12}|, & B_{11}-|B_{12}|-| \\ b & |B_{13}|, & 0, & |B_{23}|, & B_{33}-|B_{13}|-| \\ c & |B_{12}|, & |B_{23}|, & 0, & B_{22}-|B_{12}|- \\ d & B_{11}-|B_{12}|-|B_{13}|, & B_{33}-|B_{13}|-|B_{23}|, & B_{22}-|B_{12}|-|B_{23}|, & 0 \end{array}$$

Für das binäre Problem verfüge man über die Vorzeichen der Veränderlichen so, daß

(161) $$\hat{B}_{12} \geqq 0$$

wird. Man setze

(162) $$\hat{E}^{(\alpha 3)} = \hat{B}_{\alpha\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha = 1, 2,$$

(163) $$\hat{E}^{(12)} = \hat{B}_{11} - 2\hat{B}_{12} + \hat{B}_{22}.$$

Dann sind die drei Bedingungen (121) wegen (153) und (154) erfüllt. Es wird

(164) $$\hat{g}_\alpha = \hat{B}_{\alpha\alpha} - \hat{B}_{12} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

(165) $$\hat{g}_3 = \hat{B}_{12}.$$

§ 8.

Im folgenden soll das binäre Analogon zu § 6 nachgeholt werden. Man ersetze in (34) $\hat{Q}(\hat{x}_\lambda)$ durch die reduzierte Form $\hat{R}(\hat{z}_\alpha)$. Es gelte (161). Man setze

$$\hat{U}_\alpha^{(n)} = \begin{matrix} \alpha = \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} n=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1, & -1, & 0, & 1, & 1, & 0, & \dots \\ 0, & 1, & 1, & 0, & -1, & -1, & 0, & 1, & \dots \end{pmatrix}$$

allgemein

$$\hat{U}_\alpha^{(n+1)} = \hat{U}_\alpha^{(n)} - \hat{U}_\alpha^{(n-1)},$$

woraus

$$\hat{U}_\alpha^{(n+6)} = \hat{U}_\alpha^{(n)}$$

folgt. Es soll bewiesen werden, daß die unendlich vielen Bedingungen für die $\hat{\xi}_\alpha$

(165a) $$\hat{R}(\hat{\xi}_\alpha) \leqq \hat{R}(\hat{z}_\alpha - \hat{\xi}_\alpha),$$

wo $\hat{z}_\alpha$ sämtliche ganzzahligen Wertepaare durchläuft, die Folge sind von sechs unter ihnen, nämlich

$$\hat{R}(\hat{\xi}_\alpha) \leqq \hat{R}(\hat{U}_\alpha^{(n)} - \hat{\xi}_\alpha).$$

Man bestimme

(166) $$\hat{z}_1^{(n)} \hat{U}_\alpha^{(n)} + \hat{z}_2^{(n)} \hat{U}_\alpha^{(n+1)} = \hat{z}_\alpha.$$

Es ist

$$\hat{z}_1^{(1)} = \hat{z}_1; \quad \hat{z}_2^{(1)} = \hat{z}_2.$$

Aus (166) folgt

$$\hat{z}_1^{(n)} (\hat{U}_\alpha^{(n+1)} - \hat{U}_\alpha^{(n+2)}) + \hat{z}_2^{(n)} \hat{U}_\alpha^{(n+1)} = \hat{z}_\alpha,$$

$$(\hat{z}_1^{(n)} + \hat{z}_2^{(n)}) \hat{U}_\alpha^{(n+1)} - \hat{z}_1^{(n)} \hat{U}_\alpha^{(n+2)} = \hat{z}_\alpha,$$

mithin

$$\hat{z}_1^{(n+1)} = \hat{z}_1^{(n)} + \hat{z}_2^{(n)}; \quad \hat{z}_2^{(n+1)} = -\hat{z}_1^{(n)}.$$

Also ergibt sich

$$\hat{z}_\alpha^{(n)} = \begin{matrix} n= \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1, & \hat{z}_1 + \hat{z}_2, & \hat{z}_2, & -\hat{z}_1, & -(\hat{z}_1 + \hat{z}_2), & -\hat{z}_2 \\ \hat{z}_2, & -\hat{z}_1, & -(\hat{z}_1 + \hat{z}_2), & -\hat{z}_2, & \hat{z}_1, & \hat{z}_1 + \hat{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Für jedes von 0, 0 verschiedene Wertepaar ist eines der sechs Wertepaare $z_\alpha^{(n)}$ positiv. Setzt man an Stelle der $X_\lambda^{(n)}$

(167) $$\hat{Z}_\alpha^{(1)} = \hat{U}_\alpha^{(n)}, \qquad \hat{Z}_\alpha^{(2)} = \hat{U}_\alpha^{(n+1)}, \qquad \hat{Z}_\alpha^{(3)} = 0,$$

so wird

$$\hat{m}^{(1)} = \hat{z}_1^{(n)}, \qquad \hat{m}^{(2)} = \hat{z}_2^{(n)}, \qquad \hat{m}^{(3)} = 1 - \hat{z}_1^{(n)} - \hat{z}_2^{(n)}.$$

Für das gegebene Wertepaar $\hat{z}_\alpha$ kann man also n so wählen, daß

$$\hat{m}^{(1)} \geqq 0\,; \qquad \hat{m}^{(2)} \geqq 0\,.$$

Der Schluß des Beweises verläuft völlig analog (138) bis (146). Die Vergrößerung von $\hat{R}(\hat{\zeta}_\alpha)$ entsprechend (82) bis (103), wobei (165a) erhalten bleibt, führt auf Bedingungen von der Form

$$\hat{R}(\hat{\zeta}_\alpha) = \hat{R}(\hat{U}_\alpha^{(n)} - \hat{\zeta}_\alpha), \tag{167a}$$

und zwar mindestens auf zwei verschiedene Gleichungen (167a). Die entsprechende allgemeine Ungleichheitsbedingung

$$\hat{R}(\hat{\zeta}_\alpha) \leqq \hat{R}(\hat{U}_\alpha^{(n)} - \hat{\zeta}_\alpha) \tag{167b}$$

läßt sich in der Form schreiben:

$$0 \leqq -2\hat{R}(\hat{U}_\alpha^{(n)}, \hat{\zeta}_\beta) + \hat{R}(\hat{U}_\alpha^{(n)}). \tag{167c}$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_\alpha^{(1)} + \hat{U}_\alpha^{(3)} + \hat{U}_\alpha^{(5)} &= 0 \quad (167\text{d}) \\ \hat{U}_\alpha^{(n)} + \hat{U}_\alpha^{(n+3)} &= 0 \quad (167\text{e}) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

also erhält man durch Einsetzen in die Bilinearform $\hat{R}$ auch die „bilineare" Gleichung (167d), die von der Form (146h) ist; wegen der „bilinearen" Gleichung (167e) sind die sechs Beziehungen (167c) von der Form (146g). Dem Zyklus (146k) entspricht hier der Zyklus

$$n = (1, 2, 3, 4, 5, 6). \tag{167f}$$

Den drei Bedingungen (146i) entsprechen mit Rücksicht auf (162), (163) die drei Bedingungen (108). Auf Grund der gleichen Schlüsse führt die Vergrößerung von $\hat{R}(\hat{\zeta}_\alpha)$ auf zwei Bedingungen der Form (167a), deren obere Indizes n im Zyklus (167f) benachbart sind. Die drei Werte $\hat{E}^{(\alpha,\beta)}$ werden, wie aus (162) und (163) folgt, durch die Wahl eines anderen n in (167) nur permutiert, liefern also, in (65) eingesetzt, nur *ein* $\hat{\Phi}$ und *ein* $\hat{K} = \frac{\hat{\Phi}}{2}$. Also ist

$$\hat{W}(\hat{Q}) = \hat{K}\,.$$

§ 9.

Es seien Q, Q', Q'' definite quadratische Formen. Das System der $X_\lambda^{(\varrho)}$ sei für alle drei Formen dasselbe. Es sei

$$Q''(x_\lambda) = Q(x_\lambda) + Q'(x_\lambda)\,. \tag{168}$$

Da

$$Q(\xi_\lambda - \Xi_\lambda) \geqq 0\,, \tag{169}$$

so folgt aus (105)

$$S(\mu^{(\varrho)}) \leqq \Phi = 2K. \tag{170}$$

Hieraus folgt

$$S''(\mu^{(\varrho)}) = S(\mu^{(\varrho)}) + S'(\mu^{(\varrho)}) \leqq \Phi + \Phi', \tag{171}$$

also speziell

$$\Phi'' = S''(\mathsf{M}''^{(\varrho)}) \leqq \Phi + \Phi' \tag{172}$$

oder

$$K'' \leqq K + K'. \tag{173}$$

Es mögen die gestrichenen wie die ungestrichenen Gleichungen (106), (109), (110) gelten; durch Addition erhält man die analogen zweimal gestrichenen Gleichungen, ebenso die zweimal gestrichenen (108), (111) bis (118). Insbesondere ist

$$g''_{pq} = g_{pq} + g'_{pq}. \tag{174}$$

Aus (174) in Verbindung mit dem gestrichenen und ungestrichenen (114) folgen umgekehrt alle gemachten Voraussetzungen. Es wird

$$T''(\nu_L) = T(\nu_L) + T'(\nu_L).$$

Aus (147) und (172) folgt

$$\begin{aligned} W(Q'') &= \operatorname*{Max}_{L=\mathrm{I,II,III}}(K''_L) = K''_{\bar{L}} \leqq K_{\bar{L}} + K'_{\bar{L}} \\ &\leqq \operatorname*{Max}_{L=\mathrm{I,II,III}}(K_L) + \operatorname*{Max}_{L=\mathrm{I,II,III}}(K'_L) = W(Q) + W(Q'). \end{aligned} \tag{175}$$

Nach einem Minkowskischen[1]) Satze ist

$$\sqrt[3]{D(Q'')} \geqq \sqrt[3]{D(Q)} + \sqrt[3]{D(Q')}. \tag{176}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls

$$Q'(x_\lambda) = s\,Q(x_\lambda), \tag{177}$$

wo s ein Zahlenfaktor. Dies läßt sich auch kurz so beweisen: Führt man die Zerlegung (7) in $Q''(x_\lambda)$ aus, so kommt aus der Zerlegung der beiden dreigliedrigen Quadrate noch ein zweigliedriges Quadrat zu den beiden zweigliedrigen Quadraten hinzu. Es ist also

$$f''^{\,2}_{\gamma\gamma} \geqq f^2_{\gamma\gamma} + f'^{\,2}_{\gamma\gamma}.$$

---

[1]) Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. [Journ. f. Math. 129 (1905), S. 220–274, oder Ges. Werke Bd. II, S. 53–100], § 8.

Es ist nach dem Satze vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\sqrt[3]{\prod_\gamma \frac{f_{\gamma\gamma}^2}{f_{\gamma\gamma}^2+f_{\gamma\gamma}'^2}}+\sqrt[3]{\prod_\gamma \frac{f_{\gamma\gamma}'^2}{f_{\gamma\gamma}^2+f_{\gamma\gamma}'^2}}$$

$$\leqq \frac{1}{3}\sum_\gamma \frac{f_{\gamma\gamma}^2}{f_{\gamma\gamma}^2+f_{\gamma\gamma}'^2}+\frac{1}{3}\sum_\gamma \frac{f_{\gamma\gamma}'^2}{f_{\gamma\gamma}^2+f_{\gamma\gamma}'^2}=\frac{1}{3}\sum_\gamma 1=1.$$

Also ist

$$\sqrt[3]{D(Q'')}=\sqrt[3]{\prod_\gamma f_{\gamma\gamma}''^2}\geqq\sqrt[3]{\prod_\gamma (f_{\gamma\gamma}^2+f_{\gamma\gamma}'^2)}$$

$$\geqq\sqrt[3]{\prod_\gamma f_{\gamma\gamma}^2}+\sqrt[3]{\prod_\gamma f_{\gamma\gamma}'^2}=\sqrt[3]{D(Q)}+\sqrt[3]{D(Q')}\,.$$

Das ist aber (176). Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn

$$f_{\gamma\gamma}'^2=\varepsilon f_{\gamma\gamma}^2$$

und auch die Quadrate der Zerlegungen (7) proportional, d. h. wenn (177) erfüllt ist.

Es gelte (114) gestrichen und ungestrichen und (174); es sei zur Abkürzung eingeführt

$$\varepsilon(Q)=\frac{W(Q)}{\sqrt[3]{D(Q)}}\,; \tag{178}$$

ψ sei eine positive Zahl und es werde vorausgesetzt

$$\varepsilon(Q)\leqq\psi \qquad \varepsilon(Q')\leqq\psi\,. \tag{179}$$

Dann wird behauptet:

((180) durch Umnumerierung fortgefallen.)

$$\varepsilon(Q'')\leqq\psi\,. \tag{181}$$

Es ist nach (175), (176), (179)

$$W(Q'')\leqq W(Q)+W(Q')\leqq\psi\cdot(\sqrt[3]{D(Q)}+\sqrt[3]{D(Q')})\leqq\psi\sqrt[3]{D(Q'')},$$

also gilt (181).

Obwohl ich es im folgenden nicht benutzen werde, will ich hieraus das Minimum von $\varepsilon(Q)$ für alle möglichen Formen Q ableiten. (181) läßt sich für beliebig viele Summanden beweisen. Die Summe sämtlicher Formen, die durch alle 24 Permutationen von a, b, c, d entstehen, bezeichne man mit $\sum^{24} Q(x_\lambda)$. Da

$$W(\varepsilon Q)=\varepsilon(WQ),$$

$$\sqrt[3]{D(\varepsilon Q)}=\varepsilon\sqrt[3]{D(Q)},$$

so ist

$$\varepsilon(\varepsilon Q)=\varepsilon(Q)\,. \tag{182}$$

Bezeichnet $Q^*(x_\lambda)$ die quadratische Form, die aus $g^*_{pq} = 1$ (für $p, q = a, b, c, d$) entsteht, so ist

$$\sum^{24} Q(x_\lambda) = \sum^{24}(g_{pq}) \cdot Q^*(x_\lambda).$$

Setzt man

$$\psi = \varepsilon(Q),$$

so wird

$$\varepsilon(Q^*) = \varepsilon\left(\sum^{24} Q\right) \leqq \varepsilon(Q). \tag{183}$$

Es ist nach (131)

$$T^*(\nu_L) = 4 \sum_L \nu_L^2,$$

also

$$D(T^*) = 4^3 = 2^6.$$

Es ist nach (77) und (130)

$$D(S^*) = -8 D(Q^*) = -2 D(T^*) = -2^7.$$

Also ist nach (65), (111), (112), (115), (116), (117)

$$W(Q^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0, & 4, & 3, & 3 \\ 4, & 0, & 3, & 3 \\ 3, & 3, & 0, & 4 \\ 3, & 3, & 4, & 0 \end{vmatrix}}{D(S^*)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2^6 \cdot 5}{-2^7} = \frac{5}{4}.$$

Ferner ist

$$D(Q^*)^{\frac{1}{3}} = D(T^*)^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}.$$

Es ergibt sich

$$\varepsilon(Q^*) = \frac{W(Q^*)}{\sqrt[3]{D(Q^*)}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \frac{5}{8\sqrt[3]{2}}.$$

Aus (183) folgt

$$\varepsilon(Q) \geqq \frac{5}{8\sqrt[3]{2}}. \tag{184}$$

Das Minimum wird nur von den zu Q^* proportionalen Formen angenommen.

Für das binäre Problem wird

$$\hat{g}^*_\alpha = 1,$$

$$\hat{E}^{*(\alpha\beta)} = 2;$$

wegen (182) darf man schreiben

$$\hat{E}^{*(\alpha\beta)} = 1.$$

Dann wird

$$\hat{D}(\hat{S}^*) = \begin{vmatrix} 0, & -1, & -1, & 1 \\ -1, & 0, & -1, & 1 \\ -1, & -1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & -3 \end{vmatrix} = -$$

Es wird

$$\hat{W}(\hat{Q}^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0, & -1, & -1 \\ -1, & 0, & -1 \\ -1, & -1, & 0 \end{vmatrix}}{\hat{D}(\hat{S}^*)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{-3} = \frac{1}{3}. \tag{185}$$

Nach (77) wird

$$\hat{D}(\hat{S}) = -4\hat{D}(\hat{Q}),$$

also

$$\hat{D}(\hat{Q}^*) = -\frac{1}{4}\hat{D}(\hat{S}^*) = \frac{3}{4}, \tag{186}$$

mithin

$$\hat{\varepsilon}(\hat{Q}^*) = \frac{\hat{W}(\hat{Q}^*)}{\sqrt{\hat{D}(\hat{Q}^*)}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Es ist also für jede definite binäre quadratische Form

$$\hat{\varepsilon}(\hat{Q}) \geqq \frac{2}{3\sqrt{3}}. \tag{187}$$

(Ende des ersten Teils.)

(Eingegangen am 6. Oktober 1921.)

Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen.

Von

Heinz Prüfer in Jena.

§ 1.

Die Theorie der endlichen Abelschen Gruppen liefert als Hauptergebnis die beiden Sätze: Jede endliche Abelsche Gruppe ist auf eine einzige Weise als das direkte Produkt von primären, zu verschiedenen Primzahlen gehörigen Untergruppen darstellbar. Jede endliche Abelsche Gruppe ist das direkte Produkt von Untergruppen vom Range 1; die Zerlegung ist nicht eindeutig; ist die Gruppe aber primär, so ist ihr Typus nur auf eine Weise als das direkte Produkt von Typen der Gruppen vom Range 1 darstellbar. Die Übertragung des ersten Satzes auf alle unendlichen Abelschen Gruppen, in denen jedes Element eine positive Zahl als Ordnung besitzt, — für andere Abelsche Gruppen ist die Möglichkeit einer solchen Zerlegung von vornherein ausgeschlossen, — ist ohne Schwierigkeit ausführbar, bietet daher kein Interesse. Dagegen treten dem Versuch einer Übertragung des zweiten Satzes auf unendliche Abelsche Gruppen wesentliche Schwierigkeiten entgegen. Ich untersuche hier für eine besonders einfache Klasse solcher Gruppen, die abzählbaren primären Gruppen, inwieweit diese in derselben Weise wie die endlichen Abelschen Gruppen zerlegbar sind[1]).

Ich stelle zunächst die Definitionen der soeben bereits benutzten Grundbegriffe zusammen.

---

[1]) Diese Abhandlung ist zum größten Teil eine Umarbeitung der 1. Hälfte meiner Dissertation, Unendliche Abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung, Berlin (1921). An weiterer Literatur ist nur noch § 1 der Habilitationsschrift von Herrn F. Levi, Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen, Leipzig, B. G. Teubner (1917) zu nennen. Vgl. jedoch Fußnote [8]) der vorliegenden Arbeit.

Unter einer *Abelschen Gruppe* — da andere Gruppen in dieser Arbeit nicht vorkommen, von mir meist kurz *Gruppe* genannt — versteht man eine Menge von Elementen, zwischen denen eine assoziative, kommutative und eindeutig umkehrbare Multiplikation so definiert ist, daß Produkt und Quotient je zweier Elemente der Menge wieder zur Menge gehören. Die Begriffe Produkt, Quotient, Faktor, Potenz usw. wende ich in der üblichen Weise an, die mit dem Gebrauch bei rationalen Zahlen in formaler Übereinstimmung ist. Jede Gruppe enthält ein eindeutig bestimmtes Element, die *Einheit* oder das *Einheitselement* der Gruppe, das, mit einem beliebigen Gruppenelemente multipliziert, dieses nicht ändert. Das Produkt endlich vieler Elemente einer Gruppe ist wieder in der Gruppe enthalten. Produkte aus unendlich vielen Gruppenelementen sind nicht definiert. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise lasse ich jedoch solche unendlichen Produkte zu, in denen alle Faktoren bis auf endlich viele gleich der Einheit der Gruppe sind, und verstehe darunter das Produkt der vom Einheitselement verschiedenen Faktoren.

Eine Gruppe heißt *endlich*, *unendlich*, *abzählbar*, wenn die Menge ihrer verschiedenen Elemente endlich, unendlich, abzählbar ist.

Ist jedes Element der Gruppe $\mathfrak{B}$ auch Element der Gruppe $\mathfrak{A}$, so heißt $\mathfrak{A}$ eine *Obergruppe* von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ eine *Untergruppe* von $\mathfrak{A}$. Die gemeinsamen Elemente einer endlichen oder unendlichen Menge von Untergruppen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ einer Gruppe $\mathfrak{A}$, der *Durchschnitt* der Untergruppen, bilden wieder eine Gruppe. Daher gibt es zu jeder Menge von Elementenkomplexen $M_1, M_2, \ldots$ einer Gruppe $\mathfrak{A}$ eine kleinste Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die alle Komplexe enthält. Diese heißt die von den Elementenkomplexen *erzeugte Gruppe*: $\{M_1, M_2, \ldots\}$.

Ist A ein Element einer Gruppe $\mathfrak{A}$, so besteht $\{A\}$ aus allen Elementen A^k mit positivem oder negativem ganzzahligen Exponenten. Diese Elemente können alle voneinander verschieden sein. Kommen gleiche unter ihnen vor, so hat eine ganze positive Zahl n die Eigenschaft, daß dann und nur dann $A^k = A^l$ ist, wenn $k \equiv l \pmod{n}$ ist. Diese eindeutig bestimmte Zahl n heißt die *Ordnung* von A. Ist die Ordnung jedes Elementes von $\mathfrak{A}$ eine Potenz der Primzahl p, so heißt $\mathfrak{A}$ eine *zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe.*

Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{A}$, so besteht $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots\}$ im Falle endlich vieler $\mathfrak{B}_k$ aus allen Produkten je eines Elementes aus jeder der Gruppen $\mathfrak{B}_k$, im Falle unendlich vieler $\mathfrak{B}_k$ aus allen Elementen, die schon in einer von endlich vielen $\mathfrak{B}_k$ erzeugten Gruppe enthalten sind. Mit andern Worten: Die Gruppe $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots\}$ besteht aus allen Produkten je eines Elementes aus jeder der Gruppen $\mathfrak{B}_k$, soweit diese Produkte definiert sind. Ist jedes Element B von $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots\}$ nur auf eine Weise

als Produkt je eines Elementes B_k aus jeder Gruppe $\mathfrak{B}_k$ darstellbar oder ist, was auf dasselbe hinauskommt, ein Produkt von je einem Element aus jeder Gruppe $\mathfrak{B}_k$ nur dann gleich der Einheit E, wenn jeder Faktor gleich E ist, so nenne ich die Gruppen $\mathfrak{B}_k$ (*voneinander*) *unabhängig* und $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots\}$ ihr *direktes Produkt*: $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots$. Das Element B_k heißt die $\mathfrak{B}_k$-*Komponente* von $\mathfrak{B}$ in bezug auf die Zerlegung von $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots\}$ in die *direkten Faktoren* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$. Noch ein weiteres, oft bequemes Kriterium sei angegeben: Eine wohlgeordnete Menge $\mathfrak{B}_\varrho$ von Untergruppen einer Gruppe sind unabhängig, wenn jede Gruppe $\mathfrak{B}_\varrho$ mit der Gruppe, welche von allen $\mathfrak{B}_\varrho$ vorangehenden Gruppen erzeugt wird, nur die Einheit gemeinsam hat.

Kann man die Elemente zweier Gruppen einander eineindeutig so zuordnen, daß die Produkte entsprechender Elemente sich wieder entsprechen, so heißen die Gruppen *isomorph*. Der Inbegriff der zu einer Gruppe $\mathfrak{A}$ isomorphen Gruppen heißt der *Typus* von $\mathfrak{A}$. Ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots,$$

und ist $\mathfrak{A}_k$ zu $\mathfrak{B}_k$ isomorph, so sind auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph. Ich kann daher den Typus von $\mathfrak{A}$ als das *direkte Produkt der Typen* der Gruppen $\mathfrak{A}_k$ bezeichnen.

§ 2.

Ich habe jetzt noch den Begriff des Ranges zu definieren. Vorher will ich jedoch an einen weiteren Begriff erinnern, der ein wichtiges Hilfsmittel aller folgenden Untersuchungen ist.

Zwei Elemente einer Gruppe $\mathfrak{A}$ heißen zu derselben *Nebengruppe* von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ gehörig, wenn der Quotient der beiden Elemente in der Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Sind B_1 und B_2 zwei Nebengruppen von $\mathfrak{B}$, so gehören alle Produkte eines Elementes aus B_1 mit einem Elemente aus B_2 derselben Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ an. Diese heißt das *Produkt* $\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2$ *der Nebengruppen* B_1 und B_2 von $\mathfrak{B}$. Die Nebengruppen von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ bilden bei dieser Definition der Multiplikation eine Abelsche Gruppe, die zu $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ *komplementäre Gruppe* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Bilden gewisse Nebengruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ der Untergruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ eine Gruppe, so bilden die in ihnen enthaltenen Elemente eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, die Obergruppe von $\mathfrak{C}$ ist, und die von $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ gebildete Gruppe ist gleich $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$. Insbesondere ist daher, wenn die Elemente $A_1, A_2, \ldots$ von $\mathfrak{A}$ den Nebengruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ von $\mathfrak{C}$ angehören und $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ die von den Γ_k erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ ist, $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{C}, A_1, A_2, \ldots\}$.

Ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$. Man kann daher die Gruppe

$(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C})$ bilden. Diese unterscheidet sich von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nur dadurch, daß die Elemente der ersteren Gruppe als Mengen von Nebengruppen von $\mathfrak{C}$, die Elemente der letzteren Gruppe dagegen als die entsprechenden Mengen von Elementen von $\mathfrak{A}$ definiert sind. Wenn man diesen, hier belanglosen, Unterschied unberücksichtigt läßt, kann man

$$(\mathfrak{A}/\mathfrak{C})/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$$

setzen.

Ist $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$, so ist in jeder Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ mindestens ein Element von $\mathfrak{C}$ enthalten. Sind C_1 und C_2 zwei Elemente von $\mathfrak{C}$, die derselben Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ angehören, so ist $C_1 C_2^{-1}$ ein Element des Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, so ist daher in jeder Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ nur ein Element von $\mathfrak{C}$ enthalten. Daraus folgt, daß die Gruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ isomorph sind.

Ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{A}$ und hat das Element A von $\mathfrak{A}$ die Ordnung n, so ist die n-te Potenz der Nebengruppe von $\mathfrak{B}$, der A angehört, gleich $\mathfrak{B}$, dem Einheitselement der Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{A}$ eine primäre Gruppe, so ist daher auch $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ primär.

§ 3.

Unter dem Range einer endlichen Gruppe versteht man die kleinste Anzahl von Elementen der Gruppe, durch welche diese erzeugt werden kann. Um den Begriff des Ranges auf unendliche Gruppen auszudehnen, habe ich eine alle Gruppen umfassende Definition aufzustellen, die für endliche Gruppen mit der obigen Definition übereinstimmt. Welche der sich darbietenden Möglichkeiten man wählt, darüber entscheiden nur Zweckmäßigkeitsgründe, die sich aus der Problemstellung ergeben. Ich kann daher definieren: Ist jede endliche Menge von Elementen der nicht nur aus der Einheit bestehenden Gruppe $\mathfrak{A}$ in einer von r Elementen von $\mathfrak{A}$ erzeugten Gruppe enthalten und gibt es keine kleinere Zahl als r mit der gleichen Eigenschaft, so soll r der *Rang* der Gruppe $\mathfrak{A}$ heißen. Gibt es, wie groß die Zahl r auch gewählt sein mag, in der Gruppe $\mathfrak{A}$ stets endlich viele Elemente, die in keiner durch höchstens r Elemente von $\mathfrak{A}$ erzeugten Gruppe enthalten sind, so nenne ich $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von unendlichem Range. Einer nur aus der Einheit bestehenden Gruppe legt man zweckmäßig den Rang 0 bei.

I. *Ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so ist der Rang von $\mathfrak{B}$ nicht größer als der Rang von $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Hat $\mathfrak{A}$ den Rang r, so sind je endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}$ in einer durch r Elemente von $\mathfrak{A}$ erzeugten Gruppe enthalten. Der Satz braucht daher nur für den Fall bewiesen zu werden, daß $\mathfrak{A}$ von

r Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ erzeugt wird. Es sei $\mathfrak{A}' = \{A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}\}$ und $\mathfrak{B}'$ der Durchschnitt der Gruppen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}$. Dann sind in keiner Nebengruppe von $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$ zwei verschiedene Nebengruppen B_1 und B_2 von $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{B}$ enthalten; denn jedes Element aus $\mathsf{B}_1 \mathsf{B}_2^{-1}$ gehörte sonst zu $\mathfrak{A}'$, aber nicht zu $\mathfrak{B}'$. Daher ist $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}'$ zu einer Untergruppe der von einem Element — nämlich der Nebengruppe von $\mathfrak{A}'$, in der A_r enthalten ist — erzeugten Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}', A_r\}/\mathfrak{A}'$ isomorph. Da jede Untergruppe einer von einem Element erzeugten Gruppe wieder von einem Element erzeugt werden kann, wird demnach auch $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}'$ durch ein einziges Element B erzeugt. Ist B ein beliebiges Element von $\mathfrak{B}$ aus B, so wird $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}', B\}$, woraus sich der Satz durch Induktion ergibt.

II. *Ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so ist der Rang von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nicht größer als der Rang von $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Sind $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \ldots$ endlich viele Nebengruppen von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$, so greife man aus jeder ein Element $B_1, B_2, \ldots$ heraus. Hat $\mathfrak{A}$ den Rang r, so gehören die Elemente B_k einer von r Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ erzeugten Gruppe an. Die Nebengruppen von $\mathfrak{B}$, in denen $A_1, A_2, \ldots, A_r$ enthalten sind, erzeugen dann eine Untergruppe von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, die alle B_k als Elemente enthält.

III. *Wird eine Gruppe $\mathfrak{A}$ durch endlich viele Gruppen $\mathfrak{B}_k$ mit den endlichen Rangzahlen r_k erzeugt, so ist der Rang von $\mathfrak{A}$ höchstens gleich Σr_k.*

Beweis. Jedes Element von $\mathfrak{A}$ ist das Produkt je eines Elementes B_k der Gruppen $\mathfrak{B}_k$, also in der von den B_k erzeugten Gruppe enthalten. Jede endliche Menge von Elementen von $\mathfrak{A}$ ist daher in einer Gruppe enthalten, die von je endlich vielen Elementen aus jeder der Gruppen $\mathfrak{B}_k$ erzeugt wird.

§ 4.

Einige Überlegungen werden vereinfacht, wenn man noch einen weiteren Begriff einführt: Ist die Menge der Elemente einer Gruppe $\mathfrak{A}$ so eineindeutig auf sich selbst abgebildet, daß Produkte entsprechender Elemente sich wieder entsprechen, und ist dabei dem Elemente A von $\mathfrak{A}$ das Element B zugeordnet, so nenne ich A und B in $\mathfrak{A}$ *symmorph*. Symmorphe Elemente einer Gruppe können sich — die Ausdrucksweise ist leicht verständlich — durch keine Eigenschaft unterscheiden, die mit Hilfe des Multiplikationsgesetzes der Gruppe allein definierbar ist.

Ist A ein Element der zu p gehörigen primären Gruppe $\mathfrak{A}$ und ist s zu p teilerfremd, so ist A die s-te Potenz des Elementes A^t, dessen Exponent t der Kongruenz

$$st \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^e)$$

genügt, wenn p^e die Ordnung von A ist. Jedes Element von $\mathfrak{A}$ ist also die s-te Potenz eines, aber auch nur eines Elementes von $\mathfrak{A}$. Denn aus $A = B^s$ und $A = C^s$ folgt $(BC^{-1})^s = E$, wenn E die Einheit von $\mathfrak{A}$ bedeutet, und daraus, weil außer E kein Element von $\mathfrak{A}$ einen Teiler von s zur Ordnung hat, $B = C$. Ersetzt man jedes Element von $\mathfrak{A}$ durch seine s-te Potenz, so erhält man also eine eineindeutige Abbildung der Elemente von $\mathfrak{A}$ auf sich selbst und in dieser sind die Produkte entsprechender Elemente wieder einander zugeordnet. Daraus folgt: *In einer, zur Primzahl p gehörigen, primären Gruppe sind die Elemente A und A^s symmorph, wenn s nicht durch p teilbar ist.*

§ 5.

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes leite ich die Haupteigenschaften der primären Gruppen vom Range 1 her und bestimme alle Typen dieser Gruppen.

Ist $\mathfrak{A}$ eine primäre Gruppe vom Range 1, so ist von je zwei Untergruppen von $\mathfrak{A}$ die eine in der anderen enthalten. Für eine von einem Element A erzeugte Gruppe gilt der Satz nämlich, weil $\mathfrak{A}$ außer den Gruppen $\{A^{p^e}\}$ keine weiteren Untergruppen besitzt. Denn jede Untergruppe von $\mathfrak{A}$ muß wieder durch ein Element erzeugbar sein. Ist aber s nicht durch p teilbar, so ist A^{sp^e} in $\{A^{p^e}\}$ zu einem diese Gruppe erzeugenden Element symmorph, erzeugt also selbst die Gruppe $\{A^{p^e}\}$. Ist jetzt $\mathfrak{A}$ eine beliebige primäre Gruppe vom Range 1 und enthält die Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ ein Element B, das nicht zur Untergruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ gehört, so wird, wenn C ein beliebiges Element von $\mathfrak{C}$ ist, die Gruppe $\{B, C\}$ durch ein Element erzeugt. Die eine der beiden Gruppen $\{B\}$ und $\{C\}$ muß also eine Obergruppe der andern sein. Da B nicht in $\{C\}$ enthalten sein kann, ist C ein Element von $\{B\}$, d. h. $\mathfrak{C}$ ist eine Untergruppe von $\{B\}$.

Ist $\mathfrak{A}$ eine primäre Gruppe vom Range 1 und ist A ein Element von $\mathfrak{A}$, das in der Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ nicht enthalten ist, so ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\{A\}$, also eine endliche Gruppe. Eine primäre Gruppe vom Range 1 kann demnach keine unendliche Untergruppe enthalten.

Die Typen der durch ein Element erzeugten primären Gruppen kann man sofort bestimmen. Denn zwei Gruppen $\{A\}$ und $\{B\}$ sind dann und nur dann isomorph, wenn A und B dieselbe Ordnung haben. Den Typus der durch ein Element der Ordnung p^e erzeugten Gruppen bezeichne ich mit (p^e).

Kann die primäre Gruppe $\mathfrak{A}$ vom Range 1 nicht durch ein Element erzeugt werden, so gibt es in $\mathfrak{A}$ eine Folge von Elementen $A, B, C, \ldots$, von denen jedes in der vom nächsten Element erzeugten Gruppe enthalten ist, zwischen denen also Gleichungen

$$A = B^a, \quad B = C^b, \ldots$$

bestehen. Ist $a = sp^e$, wo s zu p teilerfremd, so erzeugt auch B^s die Gruppe $\{B\}$. Es bedeutet daher keine Einschränkung, wenn man die Zahlen $a, b, \ldots$ als Potenzen von p voraussetzt. Es gibt also in $\mathfrak{A}$ eine unendliche Folge verschiedener Elemente $A_1, A_2, \ldots$, die durch die Gleichungen $A_k = A_{k+1}^p$ miteinander verbunden sind. Dabei kann man noch annehmen, daß A_1 die Ordnung p hat. Die Gruppe $\{A_1, A_2, \ldots\}$ ist eine unendliche Untergruppe von $\mathfrak{A}$, also mit $\mathfrak{A}$ identisch. Ist $\mathfrak{B}$ eine zweite unendliche primäre Gruppe vom Range 1 und sind die Elemente $B_1, B_2, \ldots$ aus $\mathfrak{B}$ ebenso ausgewählt wie die Elemente $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathfrak{A}$, so braucht man nur die Elemente A_k und B_k einander zuzuordnen, um zu erkennen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph sind. Den Typus der unendlichen primären Gruppen vom Range 1 bezeichne ich mit (p^∞).

Um nachzuweisen, daß Gruppen vom Typus (p^∞) überhaupt existieren, gebe ich ein Beispiel einer solchen Gruppe an: Die durch die rationalen Zahlen, welche in ihrer reduzierten Bruchdarstellung eine Potenz von p als Nenner haben, repräsentierten Restklassen mod 1 bilden, wenn man die gewöhnliche Addition der Restklassen als Multiplikation der Gruppenelemente auffaßt, eine Gruppe vom Typus (p^∞). Die Existenz solcher Gruppen ist der Grund, weshalb ich in § 3 den Rang einer unendlichen Gruppe nicht einfach als die kleinste Anzahl von Elementen der Gruppe, durch welche diese erzeugt werden kann, definiert habe.

§ 6.

Ist $\mathfrak{A}$ eine zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe und ist A ein Element der Ordnung p^e von $\mathfrak{A}$, so nenne ich e den *Ordnungsexponenten* von A.

Hat A den Ordnungsexponenten e, so ist der Ordnungsexponent von A^{p^f} die größere der beiden Zahlen $e - f$ und 0. Ist s zu p teilerfremd, so hat A^s, als zu A symmorphes Element, denselben Ordnungsexponenten wie A. Der Ordnungsexponent jedes Elementes A^k ist also durch den Ordnungsexponenten von A eindeutig bestimmt. Das folgt auch unmittelbar aus der Definition der Ordnung.

Sind die Elemente A^{p^e} und B^{p^f} gleich der Einheit E und ist $e \geqq f$, so ist auch $(A B^{\pm 1})^{p^e} = E$. Daraus folgt: Die Elemente einer primären Gruppe $\mathfrak{A}$, deren Ordnungsexponenten höchstens gleich e sind, bilden eine

Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Sind e und f die Ordnungsexponenten von A und B, so ist der Ordnungsexponent von AB also gleich e, wenn $e > f$, höchstens gleich e, wenn $e = f$. Ist aber die Gruppe $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{A}_k$ und ist A_k die $\mathfrak{A}_k$-Komponente eines Elementes A von $\mathfrak{A}$, so ist der Ordnungsexponent von A stets gleich dem Maximum der Ordnungsexponenten der Elemente A_k. Denn aus $A^{p^e} = \Pi A_k^{p^e} = E$ folgen die Gleichungen $A_k^{p^e} = E$. Daraus schließt man: Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots$ eine primäre Gruppe und sind $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ die Gruppen der Elemente von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, deren Ordnungsexponenten höchstens gleich e sind, so ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots$.

§ 7.

Ist A ein Element der zu p gehörigen primären Gruppe $\mathfrak{A}$ und ist $n = sp^e$, wo s zu p teilerfremd, so hat die Gleichung $X^n = A$ dann und nur dann in $\mathfrak{A}$ eine Lösung, wenn die Gleichung $X^{p^e} = A$ in $\mathfrak{A}$ lösbar ist. Denn die Wurzeln der letzteren Gleichung genügen der Gleichung $X^n = A^s$. Da A und A^s symmorph sind, hat also auch die Gleichung $X^n = A$ eine Wurzel. Der zweite Teil der Behauptung aber ist selbstverständlich. Man kann sich daher, wenn man die Lösbarkeit der Gleichungen $X^n = A$ untersuchen will, auf den Fall beschränken, daß n eine Potenz von p ist.

Es gibt nun entweder eine größte ganze Zahl $e \geqq 0$, für welche die Gleichung $X^{p^e} = A$ in $\mathfrak{A}$ lösbar ist, oder diese Gleichung hat für jeden noch so hohen Exponenten von p eine Wurzel. Im ersteren Falle nenne ich e den *Höhenexponenten* von A in $\mathfrak{A}$; im letzteren Falle sage ich, A habe in $\mathfrak{A}$ den Höhenexponenten ∞.

In jeder Gruppe hat das Einheitselement den Höhenexponenten ∞. Doch kann es noch weitere Elemente mit unendlichem Höhenexponenten geben. So hat jedes Element einer Gruppe vom Typus (p^∞) den Höhenexponenten ∞.

Ist s nicht durch p teilbar, so haben A und A^s, als symmorphe Elemente, gleiche Höhenexponenten. Hat A den Höhenexponenten e, so hat A^{p^f} mindestens den Höhenexponenten $e + f$. (Dabei ist $\infty + f = \infty$ zu setzen.) In $\{A\}$ hat A^{p^f} den Höhenexponenten f, wenn A^{p^f} nicht das Einheitselement ist.

Ist $\bar{A}^{p^e} = A$ und $\bar{B}^{p^e} = B$, so wird $(\bar{A}\bar{B}^{\pm 1})^{p^e} = BC^{\pm 1}$. Daraus folgt: Die Elemente einer primären Gruppe $\mathfrak{A}$, deren Höhenexponenten mindestens gleich e sind, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Sind e und f die Höhenexponenten von A und B, so ist der Höhenexponent von AB

also gleich e, wenn $e < f$, mindestens gleich e, wenn $e = f$. Ist aber $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{A}_k$ und ist A_k die $\mathfrak{A}_k$-Komponente eines Elementes A von $\mathfrak{A}$, so ist der Höhenexponent von A stets gleich dem Minimum der Höhenexponenten der Elemente A_k. Denn ist $A = B^n$ und ist $B = \Pi B_k$ die Zerlegung von B in Komponenten, so muß $A_k = B_k^n$ sein. Daraus schließt man: Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots$ eine primäre Gruppe und sind $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ die Gruppen der Elemente von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, deren Höhenexponenten in $\mathfrak{A}$ mindestens gleich e sind, so ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots$.

§ 8.

Ist B ein Element der Untergruppe $\mathfrak{B}$ der primären Gruppe $\mathfrak{A}$, so kann der Höhenexponent von B in $\mathfrak{B}$ kleiner sein als in $\mathfrak{A}$. Denn es kann sehr wohl eine Gleichung $X^n = B$ in $\mathfrak{A}$ lösbar, aber in $\mathfrak{B}$ unlösbar sein. Für die Untergruppen von $\mathfrak{A}$, für welche dies bei keinem ihrer Elemente der Fall ist, führe ich eine besondere Bezeichnung ein: Eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ der primären Gruppe $\mathfrak{A}$ nenne ich eine *Servanzuntergruppe* von $\mathfrak{A}$, wenn jedes Element von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ denselben Höhenexponenten wie in $\mathfrak{A}$ hat. Mit andern Worten: Eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ soll eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$ heißen, wenn für jedes Element B von $\mathfrak{B}$ jede Gleichung $X^n = B$ entweder in $\mathfrak{B}$ lösbar oder in $\mathfrak{A}$ unlösbar ist. Aus der Definition folgt sofort: Ist $\mathfrak{B}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{C}$ auch eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe der primären Gruppe $\mathfrak{A}$ und ist Γ eine Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$, so kann der Ordnungsexponent von Γ in $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ kleiner sein als der Ordnungsexponent jedes Elementes C aus Γ. Denn es kann sehr wohl die n-te Potenz jedes Elementes C in $\mathfrak{B}$ vorkommen, ohne daß ein Element C^n gleich der Einheit von $\mathfrak{A}$ ist. Für die Gruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, für welche dies bei keinem ihrer Elemente der Fall ist, führe ich eine besondere Bezeichnung ein: Die in einer primären Gruppe $\mathfrak{A}$ zu einer Untergruppe $\mathfrak{B}$ komplementäre Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nenne ich ein *Servanzkomplement* in $\mathfrak{A}$, wenn jedes Element von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ein Element gleicher Ordnung von $\mathfrak{A}$ enthält. Mit andern Worten: Die Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ soll ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}$ heißen, wenn in jeder Nebengruppe Γ von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ ein Element C enthalten ist, für welches C^n gleich dem Einheitselement von $\mathfrak{A}$ wird, sobald $\Gamma^n = \mathfrak{B}$ ist. Aus der Definition folgt sofort: Ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ auch ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}$.

Zwischen den Servanzuntergruppen und den Servanzkomplementen besteht ein fundamentaler Zusammenhang:

1. *Ist* $\mathfrak{B}$ *eine Servanzuntergruppe von* $\mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *ein Servanzkomplement in* $\mathfrak{A}$. Denn hat die Nebengruppe Γ von $\mathfrak{B}$, als Element von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, die Ordnung n und ist C ein Element aus Γ, so ist C^n in $\mathfrak{B}$ enthalten. Die Gleichung $X^n = C^n$ muß also auch in $\mathfrak{B}$ eine Wurzel B besitzen. Dann ist CB^{-1} in Γ enthalten und $(CB^{-1})^n$ gleich der Einheit.

2. *Ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *ein Servanzkomplement in* $\mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{B}$ *eine Servanzuntergruppe von* $\mathfrak{A}$. Denn ist B ein Element von $\mathfrak{B}$ und hat die Gleichung $X^n = B$ in $\mathfrak{A}$ die Wurzel C, die in der Nebengruppe Γ von $\mathfrak{B}$ enthalten ist, so ist $\Gamma^n = \mathfrak{B}$. Für ein Element $\bar{C}$ aus Γ ist daher $\bar{C}^n$ die Einheit. Dann ist $C\bar{C}^{-1}$ in $\mathfrak{B}$ enthalten und eine Wurzel der Gleichung $X^n = B$.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, so folgt aus dem nach § 2 zwischen den Gruppen $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestehenden Isomorphismus, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}$ ist. Aus 2. ergibt sich also: *Jeder direkte Faktor von* $\mathfrak{A}$ *ist eine Servanzuntergruppe von* $\mathfrak{A}$.

§ 9.

Jede primäre Gruppe enthält eine Servanzuntergruppe vom Range 1.

Ich führe den Beweis zunächst für den Fall einer zu p gehörigen primären Gruppe $\mathfrak{A}$, die kein Element vom Höhenexponenten 0 enthält. Man kann dann aus jedem Elemente A von $\mathfrak{A}$ eine unendliche Folge von Elementen $B, C, \ldots$ herleiten, die den Gleichungen

$$A = B^p, \quad B = C^p, \ldots$$

genügen. Wählt man für A ein von der Einheit verschiedenes Element, so ist die Gruppe $\{A, B, C, \ldots\}$ vom Typus (p^∞). Eine solche Gruppe ist aber eine Servanzuntergruppe jeder ihrer Obergruppen, da jedes Element bereits in ihr den größten möglichen Höhenexponenten hat.

Enthält dagegen die zu p gehörige primäre Gruppe $\mathfrak{A}$ mindestens ein Element vom Höhenexponenten 0, so wähle man unter diesen ein solches, A, von möglichst kleinem Ordnungsexponenten aus. Dann ist $\{A\}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$[2]). Denn sonst gäbe es ein, notwendig von der Einheit verschiedenes, Element A^{p^e}, das in $\mathfrak{A}$ einen größeren Höhenexponenten als e hätte. Es gäbe daher in $\mathfrak{A}$ ein Element B mit positivem Höhenexponenten, für welches $B^{p^e} = A^{p^e}$ wäre. Dann hätte AB^{-1} in $\mathfrak{A}$ den Höhenexponenten 0, aber höchstens den Ordnungsexponenten e, jedenfalls also einen kleineren Ordnungsexponenten als A.

[2]) Für endliche Gruppen findet sich diese Schlußweise bei Herrn G. A. Miller, New proof of the invariants of an Abelian group, Tôhoku Math. Journ. 2 (1912), S. 137—139. Vgl. Fußnote [4]).

Im Falle, daß $\mathfrak{A}$ ein Element A vom Höhenexponenten 0 enthält, kann man auch so schließen: Ist $\{A\}$ nicht schon selbst eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$, so gibt es eine kleinste Zahl e, für die A^{p^e} in $\mathfrak{A}$ einen größeren Höhenexponenten hat als in $\{A\}$. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ enthält also ein Element B von positivem Höhenexponenten, für welches $B^{p^e} = A^{p^e}$ ist. Dann ist $\{AB^{-1}\}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$ vom Typus (p^e). Denn ist $n = sp^f$, wo s zu p teilerfremd, und $f < e$, so hat A^n in $\mathfrak{A}$ den Höhenexponenten f, B^{-n} aber einen größeren Höhenexponenten; also ist der Höhenexponent von $(AB^{-1})^n$ in $\mathfrak{A}$ gleich f, d. h. gleich dem Höhenexponenten in $\{AB^{-1}\}$. Für $f \geqq e$ endlich ist dies selbstverständlich, da dann A^n gleich dem Einheitselement ist.

Ein besonders einfacher Beweis läßt sich für die primären Gruppen geben, in denen die Ordnungsexponenten der Elemente eine endliche Schranke nicht überschreiten. In einer solchen Gruppe $\mathfrak{A}$ kann man nämlich ein Element A so auswählen, daß der Ordnungsexponent von A von dem Ordnungsexponenten keines anderen Elementes von $\mathfrak{A}$ übertroffen wird. Dann ist aber $\{A\}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$[3]). Denn andernfalls gäbe es ein von der Einheit verschiedenes Element A^{p^e}, das in $\mathfrak{A}$ einen größeren Höhenexponenten besäße als e, und demnach ein Element B von $\mathfrak{A}$, für welches $B^{p^{e+1}} = A^{p^e}$ wäre. Dann wäre aber B von größerem Ordnungsexponenten als A.

§ 10.

Mit Hilfe des im letzten Paragraphen bewiesenen Satzes kann man die Zerlegbarkeit einer speziellen Klasse primärer Gruppen erkennen:

Enthält eine abzählbare primäre Gruppe keine unendliche Elementenfolge, in der jedes Element einen größeren Höhenexponenten als das vorangehende Element besitzt, so ist sie das direkte Produkt von Gruppen vom Range 1. *Jede Servanzuntergruppe einer solchen Gruppe ist ein direkter Faktor der Gruppe.*

Ich beweise zunächst: Ist $\mathfrak{A}$ eine zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe, die keine unendliche Folge von Elementen mit wachsendem Höhenexponenten enthält, so ist jede Servanzuntergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, für die $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ vom Range 1 ist, ein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$.

Wird nämlich erstens $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ von einem einzigen Element Γ erzeugt, so braucht man aus Γ nur ein Element C von $\mathfrak{A}$ von gleicher Ordnung mit Γ auszuwählen, was nach § 8, 1. stets möglich ist. Dann hat die Gruppe $\{C\} = \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{B}$ nur das Einheitselement gemeinsam. Aus $\{\mathfrak{B}, C\} = \mathfrak{A}$ folgt daher $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$.

[3]) Die bei endlichen Gruppen übliche Schlußweise. Vgl. Fußnote [4]).

Hat zweitens $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ den Typus (p^∞), so greife man eine beliebige Nebengruppe $\Gamma + \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}$ heraus. Da Γ in $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ den Höhenexponenten ∞ hat, gibt es, wie man n wählen mag, in $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ein Element Δ, das der Gleichung $\Delta^n = \Gamma$ genügt. Ist D ein Element von $\mathfrak{A}$ aus Δ, das dieselbe Ordnung wie Δ hat, so ist D^n ein Element aus Γ von gleicher Ordnung mit Γ. Die Höhenexponenten der in Γ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{A}$, die mit Γ gleiche Ordnung haben, sind daher nicht beschränkt. Unter diesen Elementen muß also, da $\mathfrak{A}$ keine unendliche Folge von Elementen mit wachsendem Höhenexponenten enthalten soll, ein Element C vom Höhenexponenten ∞ vorkommen. Man schließt nun, wie ich gleich zeigen werde, aus der von $\mathfrak{A}$ vorausgesetzten Eigenschaft, daß jedes Element von $\mathfrak{A}$ vom Höhenexponenten ∞ in einer Untergruppe von $\mathfrak{A}$ vom Typus (p^∞) enthalten ist. Es sei $\mathfrak{C}$ eine solche Untergruppe für das Element C. Dann sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ unabhängig. Weil $\mathfrak{C}$ eine primäre Gruppe vom Range 1 ist, muß nämlich der Durchschnitt von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ entweder eine Obergruppe oder eine Untergruppe von $\{C\}$ sein. Da aber $\mathfrak{B}$ mit $\{C\}$ nur die Einheit gemeinsam hat, kann auch $\mathfrak{C}$ keine weiteren Elemente von $\mathfrak{B}$ enthalten. Es sei $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \mathfrak{A}^*$. Dann ist $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{B}$ eine unendliche Untergruppe von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und folglich $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$.

Ich habe jetzt noch den Beweis des Satzes nachzutragen: *Enthält eine zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe $\mathfrak{A}$ keine unendliche Elementenfolge, in der jedes Element einen größeren Höhenexponenten als das vorangehende hat, so ist jedes von der Einheit verschiedene Element vom Höhenexponenten ∞ in einer Untergruppe von $\mathfrak{A}$ vom Typus (p^∞) enthalten.* Ist nämlich A ein Element von $\mathfrak{A}$ vom Höhenexponenten ∞, so haben die Höhenexponenten der Wurzeln der Gleichung $X^p = A$ keine endliche obere Schranke; es ist also eine, B, unter ihnen enthalten, die einen unendlichen Höhenexponenten besitzt. Da man auf B dieselben Schlüsse anwenden kann, läßt sich schließlich aus A eine unendliche Folge von Elementen $B, C, \ldots$ ableiten, die den Gleichungen

$$A = B^p, \quad B = C^p, \ldots$$

genügen, die also, wenn A nicht das Einheitselement ist, eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$ vom Typus (p^∞) erzeugen.

Aus dem somit bewiesenen Hilfssatz läßt sich nun der allgemeine Satz mittels eines Induktionsverfahrens herleiten, das sich auf den Satz des § 9 aufbaut:

Ist $\mathfrak{B}$ eine Servanzuntergruppe der abzählbaren primären Gruppe $\mathfrak{A}$, so gibt es eine wohlgeordnete Menge $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ von Untergruppen von $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes $\mathfrak{B}_\varrho$ ist eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$.*

2. *Ist ϱ keine Limeszahl, so ist $\mathfrak{B}_\varrho$ eine Obergruppe von $\mathfrak{B}_{\varrho-1}$ und $\mathfrak{B}_\varrho/\mathfrak{B}_{\varrho-1}$ vom Range* 1.

3. *Ist ϱ eine Limeszahl, so ist $\mathfrak{B}_\varrho$ die von allen $\mathfrak{B}_{\varrho'}$ mit $\varrho' < \varrho$ erzeugte Gruppe.*

4. *Die Menge der $\mathfrak{B}_\varrho$ bricht bei einer Ordnungszahl τ, die endlich ist oder zu $\aleph_0$ gehört, ab, und es ist $\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{A}$.*

Der Beweis wird durch transfinite Induktion geführt. Die Gruppen $\mathfrak{B}_\varrho$ seien für alle Ordnungszahlen $\varrho < \sigma$ bereits so bestimmt, daß die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllt sind. Ist dann erstens σ eine Limeszahl, so nehme man für $\mathfrak{B}_\sigma$ die durch 3. eindeutig festgelegte Gruppe. Jedes Element von $\mathfrak{B}_\sigma$ ist dann in einer von endlich vielen der vorhergehenden $\mathfrak{B}_\varrho$ erzeugten Gruppe, also auch in einer Gruppe $\mathfrak{B}_\varrho$ mit $\varrho < \sigma$ enthalten und hat, da $\mathfrak{B}_\varrho$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$ ist, in $\mathfrak{B}_\varrho$, um so mehr in $\mathfrak{B}_\sigma$, denselben Höhenexponenten wie in $\mathfrak{A}$. Daher ist 1. für $\mathfrak{B}_\sigma$ erfüllt. Ist zweitens σ keine Limeszahl, so wähle man als $\mathfrak{B}_\sigma$ eine Gruppe, für die $\mathfrak{B}_\sigma/\mathfrak{B}_{\sigma-1}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\sigma-1}$ vom Range 1 wird. Eine solche ist, solange $\mathfrak{B}_{\sigma-1}$ nicht mit $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, nach § 9 stets vorhanden. Da $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\sigma-1}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_\sigma$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\sigma-1}$ ist, ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_\sigma$ auch ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{B}_\sigma$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$. Für $\mathfrak{B}_\sigma$ sind also 1. und 2. erfüllt. Endlich muß für eine Ordnungszahl τ, welche kleiner ist als die erste zur Mächtigkeit $\aleph_1$ gehörende Ordnungszahl, $\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{A}$ werden. Denn da bei jedem ϱ die Gruppe $\mathfrak{B}_{\varrho+1}$ mindestens ein nicht zu $\mathfrak{B}_\varrho$ gehöriges Element enthält, ist die Mächtigkeit der Menge der Gruppen $\mathfrak{B}_\varrho$, die man auf die angegebene Weise definieren kann, nicht größer als die Mächtigkeit der Menge der Elemente von $\mathfrak{A}$.

In dem letzten Schlusse wird mit einer Menge operiert, die nicht mehr abzählbar ist. Darin kann man einen methodischen Mangel des soeben geführten Existenzbeweises erblicken. Ich werde deshalb in § 16 einen zweiten Beweis liefern, der ohne Benutzung von Mengen höherer Mächtigkeit auskommt.

Bestimmt man jetzt nach dem zu Anfang bewiesenen Hilfssatz für jede Ordnungszahl ϱ eine Gruppe $\mathfrak{C}_\varrho$ so, daß $\mathfrak{B}_{\varrho+1} = \mathfrak{B}_\varrho \times \mathfrak{C}_\varrho$ wird, so ist, wie sich durch transfinite Induktion ergibt, für jede Ordnungszahl ϱ

$$\mathfrak{B}_\varrho = \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{\varrho'}, \ldots\},$$

wenn ϱ' alle Ordnungszahlen vor ϱ durchläuft. Ist diese Gleichung nämlich für alle $\varrho < \sigma$ schon als richtig erkannt, so folgt sie für σ, wenn σ keine Limeszahl ist, aus $\mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{B}_{\sigma-1} \times \mathfrak{C}_{\sigma-1}$, wenn σ eine Limeszahl ist, daraus, daß $\mathfrak{B}_\sigma$ die von allen Gruppen $\mathfrak{B}_\varrho$ mit $\varrho < \sigma$ erzeugte Gruppe ist. Hieraus

ergibt sich nach § 1, daß die Gruppen $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots$ unabhängig sind. Es ist also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots .$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{B}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$ ist. Setzt man für $\mathfrak{B}$ das Einheitselement, so hat man $\mathfrak{A}$ als direktes Produkt von Gruppen vom Range 1 dargestellt[4]).

§ 11.

Mit denselben Methoden kann man einen Satz beweisen, der eine Verallgemeinerung des zweiten Teiles des Satzes im vorigen Paragraphen ist:

Ist $\mathfrak{B}$ eine Servanzuntergruppe der abzählbaren primären Gruppe $\mathfrak{A}$ und enthält $\mathfrak{B}$ keine unendliche Elementenfolge, in der jedes Element einen größeren Höhenexponenten als das vorangehende besitzt, so ist $\mathfrak{B}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$[5]).

Ich beweise zunächst einen Hilfssatz: Es sei $\mathfrak{A}$ eine primäre Gruppe und $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, deren komplementäre Gruppe in $\mathfrak{A}$ vom Range 1 ist. Gibt es dann in $\mathfrak{B}$ keine unendliche Folge von Elementen mit wachsendem Höhenexponenten, so gibt es auch in $\mathfrak{A}$ keine solche. Beweis: Wegen der von $\mathfrak{B}$ vorausgesetzten Eigenschaft gibt es eine Zahl e, welche von dem Höhenexponenten keines Elementes von $\mathfrak{B}$ übertroffen wird, es sei denn, daß dieser unendlich ist. Existiert nun eine unendliche Folge von Elementen $A_1, A_2, \ldots$ von $\mathfrak{A}$ mit wachsendem Höhenexponenten, so kann man voraussetzen, daß bereits der Höhenexponent von A_1 größer als e ist. Es sei A_k die Nebengruppe von $\mathfrak{B}$, zu der A_k gehört. Unter den von je einem A_k erzeugten Untergruppen von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ gibt es dann eine, die in allen übrigen enthalten ist. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß dies die durch A_1 erzeugte Gruppe ist. Insbesondere kommt dann eine Potenz von A_2, etwa A_2^n, in A_1 vor. Der Höhenexponent von A_2, also erst recht der von A_2^{-n}, ist größer als f. Nach § 7 ist daher der Höhenexponent von $A_1 A_2^{-n}$ gleich f. Da aber $A_1 A_2^{-n}$ ein Element von $\mathfrak{B}$ ist, steht das mit der Voraussetzung $e < f$ im Widerspruch.

Es sei jetzt $\mathfrak{A}$ eine beliebige primäre Gruppe und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$, die keine Folge von Elementen mit wachsendem Höhenexponenten enthält. Man bilde eine wohlgeordnete Menge von Servanzuntergruppen $\mathfrak{B}_\varrho$ von $\mathfrak{A}$ mit denselben Eigenschaften wie in § 10. Un-

[4]) Der ganze Beweis ist die Verallgemeinerung des bei endlichen Gruppen seit Jahrzehnten gebräuchlichen Beweises.

[5]) Für den speziellen Fall, daß jedes Element von $\mathfrak{B}$ in einer Gruppe vom Typus (p^∞) enthalten ist, findet sich ein einfacher Beweis bei Herrn Levi, l. c., Satz 3.

zu zeigen, daß $\mathfrak{B}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$ ist, brauche ich jetzt nur den Satz zu beweisen: Es gibt eine wohlgeordnete Menge von Untergruppen $\mathfrak{C}_\varrho$ von $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es ist $\mathfrak{B}_\varrho = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_\varrho$.
2. Für $\varrho' < \varrho$ ist $\mathfrak{C}_{\varrho'}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{C}_\varrho$.

Den Beweis führe ich mittels transfiniter Induktion. Ich gebe eine Methode an, nach der $\mathfrak{C}_\sigma$ bestimmt werden kann, wenn vorausgesetzt wird, daß die Gruppen $\mathfrak{C}_\varrho$ für alle Ordnungszahlen $\varrho < \sigma$ schon den Bedingungen 1. und 2. gemäß bestimmt sind:

Erstens sei σ keine Limeszahl. Dann ist die Gruppe $(\mathfrak{B}_\sigma/\mathfrak{C}_{\sigma-1})/(\mathfrak{B}_{\sigma-1}/\mathfrak{C}_{\sigma-1})$ vom Range 1 und $\mathfrak{B}_{\sigma-1}/\mathfrak{C}_{\sigma-1}$ zu $\mathfrak{B}$ isomorph. Daraus folgt nach dem eben bewiesenen Satze, daß $\mathfrak{B}_\sigma/\mathfrak{C}_{\sigma-1}$ keine Folge von Elementen mit wachsendem Höhenexponenten enthält. Als direkter Faktor von $\mathfrak{B}_{\sigma-1}$ ist $\mathfrak{C}_{\sigma-1}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{B}_{\sigma-1}$, also auch von $\mathfrak{B}_\sigma$. Daraus schließt man, daß $\mathfrak{B}_{\sigma-1}/\mathfrak{C}_{\sigma-1}$ eine Servanzuntergruppe, nach § 10 also ein direkter Faktor von $\mathfrak{B}_\sigma/\mathfrak{C}_{\sigma-1}$ ist. Setzt man

$$\mathfrak{B}_\sigma/\mathfrak{C}_{\sigma-1} = \mathfrak{B}_{\sigma-1}/\mathfrak{C}_{\sigma-1} \times \mathfrak{C}_\sigma/\mathfrak{C}_{\sigma-1},$$

so ist jedenfalls 2. für $\mathfrak{C}_\sigma$ erfüllt. Ferner besteht der Durchschnitt der Gruppen $\mathfrak{B}_{\sigma-1} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_{\sigma-1}$ und $\mathfrak{C}_\sigma$ nur aus der Gruppe $\mathfrak{C}_{\sigma-1}$. Die Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}_\sigma$ sind also unabhängig. Da aus § 2 weiter $\mathfrak{B}_\sigma = \{\mathfrak{B}_{\sigma-1}, \mathfrak{C}_\sigma\}$ folgt, ergibt sich $\mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_\sigma$.

Zweitens sei σ eine Limeszahl. Setzt man die von allen $\mathfrak{C}_\varrho$ mit $\varrho < \sigma$ erzeugte Gruppe gleich $\mathfrak{C}_\sigma$, so ergibt sich wie in § 10, wenn ϱ alle Ordnungszahlen vor σ durchläuft,

$$\mathfrak{B}_\sigma = \{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho, \ldots\} = \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\varrho, \ldots\} = \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_\sigma\}.$$

Ferner folgt aus 2., daß jedes Element von $\mathfrak{C}_\sigma$ bereits in einer der Gruppen $\mathfrak{C}_\varrho$ enthalten ist, also, weil $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}_\varrho$ unabhängig sind, nur dann zu $\mathfrak{B}$ gehören kann, wenn es gleich der Einheit ist. Daher ist $\mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_\sigma$.

§ 12.

Die zweite Hälfte des in § 10 bewiesenen Satzes läßt sich umkehren:

Ist jede Servanzuntergruppe einer abzählbaren primären Gruppe ein direkter Faktor der Gruppe, so enthält die Gruppe keine unendliche Elementenfolge, in der jedes Element einen größeren Höhenexponenten als das vorangehende Element besitzt.

Beim Beweise benutze ich mehrmals eine einfache Folgerung aus dem Begriff des direkten Faktors. Ich stelle diese deshalb hier voran: Ist $\mathfrak{B}$ ein direkter Faktor der Gruppe $\mathfrak{A}$ und ist $\mathfrak{A}^*$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$ und eine Obergruppe von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{B}$ auch ein direkter Faktor von $\mathfrak{A}^*$.

Ist nämlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ und stellt man ein Element von $\mathfrak{A}^*$ als Produkt eines Elementes B von $\mathfrak{B}$ und eines Elementes C von $\mathfrak{C}$ dar, so muß, da B zu $\mathfrak{A}^*$ gehört, auch C in $\mathfrak{A}^*$ enthalten sein. Ist $\mathfrak{C}^*$ der Durchschnitt von $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{C}$, so ist deshalb $\mathfrak{A}^* = \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}^*\}$ und, weil $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}^*$ nur die Einheit gemeinsam haben, $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}^*$.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine zu p gehörige primäre Gruppe, in der es eine unendliche Folge von Elementen $A_1, A_2, \ldots$ gibt, deren Höhenexponenten $e_1, e_2, \ldots$ eine Folge wachsender Zahlen bilden. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{A}$ dann eine Servanzuntergruppe enthält, die kein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$ ist, gehe ich von einer wohlgeordneten Menge $\mathfrak{B}_\varrho$ von Servanzuntergruppen von $\mathfrak{A}$ der in § 10 betrachteten Art aus und nehme dabei für $\mathfrak{B}_0$ das Einheitselement. Ist nicht schon eine dieser Gruppen kein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$, so ist für jedes ϱ die Gruppe $\mathfrak{B}_\varrho$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{B}_{\varrho+1}$. Es gibt also eine Gruppe $\mathfrak{C}_\varrho$, für welche $\mathfrak{B}_\varrho \times \mathfrak{C}_\varrho = \mathfrak{B}_{\varrho+1}$ wird. Daraus schließt man wie in § 10:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots .$$

Eine Komponente von A_k in bezug auf diese Zerlegung von $\mathfrak{A}$ hat nach § 7 genau den Höhenexponenten e_k. Daher muß eine der Gruppen $\mathfrak{C}_\varrho$ durch ein Element erzeugt werden, dessen Ordnungsexponent mindestens gleich $e_k + 1$ ist. Es gibt also in $\mathfrak{A}$ eine unendliche Folge von Elementen $A, B, C, \ldots$, deren Höhenexponenten $e, f, g, \ldots$ eine wachsende Folge ganzer Zahlen bilden und die je eine der Gruppen $\mathfrak{C}_\varrho$ erzeugen, so daß also

$$\mathfrak{B} = \{A\} \times \{B\} \times \{C\} \times \ldots$$

ein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$ ist.

Ich definiere jetzt eine Folge von Elementen $A^*, B^*, C^*, \ldots$ mit den Ordnungsexponenten $e, f, g, \ldots$ durch die Gleichungen

$$A^* = A B^{-p^{f-e}}, \quad B^* = B C^{-p^{g-f}}, \ldots .$$

Die Gruppe $\mathfrak{B}^* = \{A^*, B^*, \ldots\}$ ist dann eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{B}$. Denn eine Gleichung

$$X^{p^k} = A^{*r} B^{*s} C^{*t} \ldots = A^r B^{s - r p^{f-e}} C^{t - s p^{g-f}} \ldots$$

ist in $\mathfrak{B}$ nur dann lösbar, wenn r durch die kleinere der Zahlen p^k und p^e teilbar ist, wenn weiter $s - r p^{f-e}$, also auch s, durch die kleinere der Zahlen p^k und p^f teilbar ist, usw. Dann hat aber die Gleichung auch in $\mathfrak{B}^*$ eine Wurzel.

Die Gruppe $\mathfrak{B}^*$ ist aber kein direkter Faktor von $\mathfrak{B}$. Denn sind $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \ldots$ die Nebengruppen von $\mathfrak{B}^*$, in denen die Elemente $A, B, C, \ldots$ enthalten sind, so folgt aus den Definitionsgleichungen von $A^*, B^*, \ldots$, daß

$$\mathsf{A} = \mathsf{B}^{p^{f-e}}, \quad \mathsf{B} = \Gamma^{p^{g-f}}, \ldots$$

ist. Daraus schließt man, daß die von den Nebengruppen $A, B, \Gamma, \ldots$ erzeugte Gruppe $\{\mathfrak{B}^*, A, B, C, \ldots\}/\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}^*$ vom Typus (p^∞) ist, wenn man noch zeigen kann, daß A nicht in $\mathfrak{B}^*$ enthalten ist. Wäre A ein Element von $\mathfrak{B}^*$, so bestände eine Gleichung

$$A = A^{*r} B^{*s} C^{*t} \ldots = A^r B^{s-rp^{f-e}} C^{t-sp^{g-f}} \ldots .$$

Daraus würde sich wegen der Unabhängigkeit der Gruppen $\{A\}, \{B\}, \ldots$

$$s \equiv p^{f-e} \not\equiv 0 \pmod{p^f},$$
$$t \equiv p^{g-e} \not\equiv 0 \pmod{p^g},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ergeben, was unmöglich ist, weil nur endlich viele der Elemente $A^{*r}, B^{*s}, C^{*t}, \ldots$ vom Einheitselement verschieden sein können. Wäre nun $\mathfrak{B}^*$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^* \times \mathfrak{C}$, so müßte $\mathfrak{C}$ den Typus (p^∞) haben. Es müßte also in $\mathfrak{C}$, um so mehr in $\mathfrak{B}$, außer der Einheit noch weitere Elemente vom Höhenexponenten ∞ geben. Das ist aber nach § 7 nicht der Fall.

Als Servanzuntergruppe von $\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{B}^*$ auch eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{B}^*$ aber kein direkter Faktor von $\mathfrak{B}$ ist, ist $\mathfrak{B}^*$ auch kein direkter Faktor von $\mathfrak{A}$. Damit ist der Satz bewiesen. Es hat sich zugleich gezeigt, daß, wenn überhaupt Gruppen existieren, die unendliche Folgen von Elementen mit wachsendem Höhenexponenten enthalten, es auch Gruppen gibt, die zwar direkte Produkte von Gruppen vom Range 1 sind, in denen aber nicht jede Servanzuntergruppe ein direkter Faktor ist.

§ 13.

Es wird sich jetzt darum handeln, überhaupt alle abzählbaren primären Gruppen zu bestimmen, welche direkte Produkte von Gruppen des Ranges 1 sind. Dazu reicht, wie gezeigt, die bisher angewandte Methode der Zerlegung nach Servanzuntergruppen nicht aus. Ich entwickle deshalb noch eine andere Methode. Diese besteht darin, daß statt der gegebenen Gruppe zunächst nur die Untergruppe der Elemente, deren Ordnungsexponenten höchstens gleich 1 sind, untersucht wird. Es ist zweckmäßig, für diese Gruppe, die naturgemäß in den folgenden Untersuchungen sehr häufig auftreten wird, ein besonderes Zeichen einzuführen: Ist $\mathfrak{A}$ eine zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe, so bezeichne ich die Gruppe der Elemente A von $\mathfrak{A}$, für die A^p gleich dem Einheitselement ist, mit $\overline{\mathfrak{A}}$.

Zuerst beweise ich mit dieser Methode, daß die Zerlegung der abzählbaren primären Gruppen in Gruppen vom Range 1, wenn sie überhaupt möglich ist, im selben Sinne wie bei den endlichen Gruppen eindeutig ist:

Der Typus einer abzählbaren primären Gruppe ist höchstens auf eine Art als das direkte Produkt von Typen der Gruppen vom Range 1 darstellbar.

Man erkennt zunächst, daß der Satz für solche Gruppen gilt, deren Elemente außer der Einheit sämtlich den Ordnungsexponenten 1 haben. Denn ist eine Gruppe $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von Gruppen $\mathfrak{C}_k$ vom Typus (p), so hat $\mathfrak{A}$, wenn die Anzahl der $\mathfrak{C}_k$ endlich, gleich n, ist, p^n verschiedene Elemente, wenn die Anzahl der $\mathfrak{C}_k$ unendlich ist, unendlich viele Elemente. Durch die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{A}$ ist die Anzahl der direkten Faktoren von $\mathfrak{A}$ also eindeutig bestimmt.

Es sei jetzt $\mathfrak{A}$ eine beliebige, zur Primzahl p gehörige, primäre Gruppe, die das direkte Produkt von Gruppen $\mathfrak{C}_k$ vom Range 1 ist. Die direkten Produkte der Gruppen $\mathfrak{C}_k$, welche die Typen (p^∞), (p^1), (p^2), ... haben, bezeichne ich mit $\mathfrak{A}_\infty$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..., so daß also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\infty \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots$$

wird. Es seien $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots$ die Gruppen der Elemente von $\mathfrak{A}$, deren Höhenexponenten mindesten gleisch $0, 1, 2, \dots$ sind. Nach § 6 und § 7 ist dann

$$\overline{\mathfrak{H}}_0 = \overline{\mathfrak{A}}_1 \times \overline{\mathfrak{H}}_1, \quad \overline{\mathfrak{H}}_1 = \overline{\mathfrak{A}}_2 \times \overline{\mathfrak{H}}_2, \dots,$$

also $\overline{\mathfrak{A}}_1$ zu $\overline{\mathfrak{H}}_0/\overline{\mathfrak{H}}_1$, $\overline{\mathfrak{A}}_2$ zu $\overline{\mathfrak{H}}_1/\overline{\mathfrak{H}}_2$, usw. isomorph. Die Typen der Gruppen $\overline{\mathfrak{A}}_k$ sind daher von der Wahl der $\mathfrak{C}_k$ unabhängig. Endlich ist $\mathfrak{A}_\infty$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{A}$ mit unendlichem Höhenexponenten, $\overline{\mathfrak{A}}_\infty$ also durch $\mathfrak{A}$ allein sogar völlig eindeutig bestimmt. Da nun jede der Gruppen $\overline{\mathfrak{A}}_\infty$, $\overline{\mathfrak{A}}_1$, $\overline{\mathfrak{A}}_2$, ... das direkte Produkt der Gruppen $\overline{\mathfrak{C}}_k$ ist, für welche $\mathfrak{C}_k$ in der entsprechenden Gruppe $\mathfrak{A}_\infty$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... enthalten ist, folgt aus dem zuerst bewiesenen speziellen Fall, daß die Anzahl der direkten Faktoren $\mathfrak{C}_l$ von $\mathfrak{A}$, die einen bestimmten Typus besitzen, nicht von der Wahl der $\mathfrak{C}_l$ abhängt.

§ 14.

Mittels der neuen Methode kann man auch leicht einen vollständigen Überblick über die primären Gruppen endlichen Ranges gewinnen.

Nach dieser Methode beweise ich zunächst, daß jede primäre Gruppe von endlichem Range das direkte Produkt von Gruppen vom Range 1 ist. Nach § 10 habe ich dazu nur zu zeigen, daß eine primäre Gruppe $\mathfrak{A}$, in der es eine Folge von Elementen $A_1, A_2, \dots$ mit wachsenden Höhenexponenten gibt, nicht von endlichem Range sein kann. Es sei $\mathfrak{B}$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{A}$ mit unendlichem Höhenexponenten, B_k das letzte der Elemente $A_k, A_k^p, A_k^{p^2}, \dots$, das nicht in $\mathfrak{B}$ enthalten ist, und $\mathfrak{B}$ die Nebengruppe von $\mathfrak{B}$, der B_k angehört. Da B_k mindestens denselben

Höhenexponenten wie A_k hat, bilden die Höhenexponenten der B_k wieder eine Folge wachsender Zahlen. Ferner haben alle Elemente einer Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ denselben Höhenexponenten; denn sie gehen auseinander durch Multiplikation mit Elementen vom Höhenexponenten ∞ hervor. Daher sind unendlich viele B_k voneinander verschieden. Die Gruppe $\overline{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}$, in der die B_k als Elemente enthalten sind, ist also unendlich. Hätte nun $\mathfrak{A}$ einen endlichen Rang, so wäre nach § 3, I. und § 3, II. auch der Rang von $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ endlich. Die Gruppe $\overline{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}$ müßte also endlich sein, weil eine von r Elementen der Ordnung p erzeugte Gruppe höchstens aus p^r Elementen besteht.

Ist die primäre Gruppe $\mathfrak{A}$ vom Range r als das direkte Produkt von Gruppen $\mathfrak{C}_k$ vom Range 1 dargestellt, so ist $\overline{\mathfrak{A}}$ das direkte Produkt der Gruppen $\overline{\mathfrak{C}}_k$. Da der Rang von $\overline{\mathfrak{A}}$ nach § 3, I. nicht größer als r, die Anzahl der Elemente von $\overline{\mathfrak{A}}$ mithin nicht größer als p^r ist, ist die Anzahl der direkten Faktoren $\mathfrak{C}_k$ höchstens gleich r. Kleiner als r kann sie aber nach § 3, III. nicht sein. Daraus folgt:

Die primären Gruppen vom Range r sind die direkten Produkte von r primären Gruppen des Ranges 1.

Bei den ferneren Anwendungen der neuen Methode brauche ich vor allem einen Hilfssatz, durch den die Frage der Zerlegbarkeit einer Gruppe $\mathfrak{A}$ vollständig erledigt wird:

Jede primäre Gruppe, deren Elemente außer der Einheit sämtlich von der Ordnung p sind, ist das direkte Produkt von Gruppen vom Typus (p). Jede Untergruppe einer solchen Gruppe ist ein direkter Faktor derselben.

Beweis. Ist $\mathfrak{A}$ eine Gruppe, deren Elemente höchstens den Ordnungsexponenten 1 haben, und ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so ordne man die Elemente von $\mathfrak{A}$ in eine, abbrechende oder unendliche, Folge $A_1, A_2, \ldots$ und wähle eine Teilfolge $C_1, C_2, \ldots$ nach diesem Prinzip aus: Es sei C_1 das erste nicht in $\mathfrak{B}$ enthaltene Element A_k, C_2 das erste nicht in $\{\mathfrak{B}, C_1\}$ enthaltene Element A_k, usw. Ist einmal $\{\mathfrak{B}, C_1, C_2, \ldots, C_n\} = \mathfrak{A}$, so breche man das Verfahren ab; sonst setze man es ins Unendliche fort. In diesem Falle wird $\{\mathfrak{B}, C_1, C_2, \ldots\} = \mathfrak{A}$; denn das Element A_k von $\mathfrak{A}$ ist in $\{\mathfrak{B}, C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ enthalten. Da jede Gruppe $\{C_k\}$ außer sich selbst und der Einheit keine Untergruppe hat, besteht der Durchschnitt der Gruppen $\{\mathfrak{B}, C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}\}$ und $\{C_k\}$ nur aus dem Einheitselement. Es ist also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \{C_1\} \times \{C_2\} \times \ldots,$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 15.

Bei den weiteren Untersuchungen brauche ich noch eine Reihe von Sätzen, die den Übergang von den Gruppen $\overline{\mathfrak{A}}$ zu den Gruppen $\mathfrak{A}$ vermitteln:

I. *Die Untergruppen* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ *einer primären Gruppe* $\mathfrak{A}$ *sind unabhängig, wenn die Gruppen* $\overline{\mathfrak{A}}_1, \overline{\mathfrak{A}}_2, \ldots$ *unabhängig sind.*

Beweis. Sind die Gruppen $\mathfrak{A}_k$ nicht unabhängig, so besteht eine Gleichung $\Pi A_k = E$, wo A_k ein Element aus $\mathfrak{A}_k$ ist und E die Einheit von $\mathfrak{A}$ bedeutet, und die Elemente A_k sind nicht sämtlich gleich E. Ist $e > 0$ das Maximum der Ordnungsexponenten der Elemente A_k, so sind die Elemente $A_k^{p^{e-1}}$ in den Gruppen $\overline{\mathfrak{A}}_k$ enthalten, aber nicht sämtlich gleich E. Wegen $\Pi A_k^{p^{e-1}} = E$ können die Gruppen $\overline{\mathfrak{A}}_k$ also nicht unabhängig sein.

II. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine primäre Gruppe und hat jedes Element von* $\overline{\mathfrak{A}}$ *in* $\mathfrak{A}$ *den Höhenexponenten* ∞, *so hat jedes Element von* $\mathfrak{A}$ *den Höhenexponenten* ∞.

Beweis. Ist A ein Element von $\mathfrak{A}$, so haben nach § 7 die Wurzeln der Gleichung $X^p = A$ in $\mathfrak{A}$ sämtlich denselben Höhenexponenten. Denn der Quotient zweier Wurzeln ist in $\overline{\mathfrak{A}}$ enthalten, hat also den größten möglichen Höhenexponenten ∞. Ist A nun von unendlichem Höhenexponenten, so können die Höhenexponenten der Wurzeln von $X^p = A$ keine obere Schranke haben, müssen also ebenfalls unendlich sein. Daraus ergibt sich sukzessive, daß alle Elemente von $\mathfrak{A}$ vom Ordnungsexponenten $2, 3, \ldots$ den Höhenexponenten ∞ besitzen.

III. *Ist* $\mathfrak{B}$ *eine Untergruppe der primären Gruppe* $\mathfrak{A}$ *und hat jedes Element von* $\overline{\mathfrak{B}}$ *in* $\mathfrak{B}$ *denselben Höhenexponenten wie in* $\mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{B}$ *eine Servanzuntergruppe von* $\mathfrak{A}$.

Beweis. Es sei B ein Element von $\mathfrak{B}$ von möglichst kleinem Ordnungsexponenten, für das eine Gleichung $X^n = B$ zwar durch ein Element A von $\mathfrak{A}$, aber durch kein Element von $\mathfrak{B}$ lösbar ist. Dann genügt, da B^p einen kleineren Ordnungsexponenten als B hat, der Gleichung $X^{np} = B^p$ nicht nur A, sondern auch ein Element C von $\mathfrak{B}$. Nun ist $(AC^{-1})^n = BC^{-n}$ ein Element von $\mathfrak{B}$. Nach der Voraussetzung besteht also für ein Element D von $\mathfrak{B}$ die Gleichung $D^n = BC^{-n}$ oder $(CD)^n = B$. Da CD ein Element von $\mathfrak{B}$ ist, widerspricht das der über B gemachten Annahme.

IV. *Ist* $\mathfrak{B}$ *eine Servanzuntergruppe der primären Gruppe* $\mathfrak{A}$ *und ist* $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}$, *so ist* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Beweis. Wenn $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}$ ist, gibt es außer $\mathfrak{B}$ selbst keine Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$, in der ein Element der Ordnung p vorkommt. Ist $\mathfrak{B}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$, so kann $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ also kein Element der Ordnung p enthalten. Folglich besteht die Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nur aus ihrem Einheitselement.

Aus II. und III. ergibt sich ein besonders einfacher Beweis des Satzes in § 9, daß jede primäre Gruppe $\mathfrak{A}$ eine Servanzuntergruppe vom Range 1 enthält: Hat erstens jedes Element A von $\overline{\mathfrak{A}}$ den Höhenexponenten ∞, so kann man, wie aus II. folgt, aus A eine unendliche Folge von Elementen von $\mathfrak{A}$ mittels der Gleichungen

$$A = B^p, \qquad B = C^p, \quad \ldots$$

herleiten. Dann ist $\{A, B, C, \ldots\}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$ vom Typus (p^∞). Enthält zweitens $\overline{\mathfrak{A}}$ ein Element A von dem endlichen Höhenexponenten e und ist $B^{p^e} = A$, so ist $\{B\}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$. Das folgt aus III., weil $\{B\} = \{A\}$ ist und alle Elemente von $\{A\}$ mit Ausnahme der Einheit in jeder Obergruppe von $\{A\}$ zu A symmorph sind.

§ 16.

Mit Hilfe der Sätze des vorigen Paragraphen und des Hilfssatzes in § 14 führe ich jetzt den in § 10 versprochenen zweiten Beweis für die Existenz einer Menge von Servanzuntergruppen, die gewissen Forderungen genügen soll. Ich kann diese Forderungen hier sogar noch verschärfen:

Ist $\mathfrak{C}_0$ eine Servanzuntergruppe der abzählbaren primären Gruppe $\mathfrak{A}$, so gibt es zwei, abbrechende oder unendliche, Folgen $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ und $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ von Servanzuntergruppen von $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *$\mathfrak{C}_k$ ist eine Obergruppe von $\mathfrak{C}_{k-1}$ und $\mathfrak{C}_k/\mathfrak{C}_{k-1}$ wird durch ein Element erzeugt.*

2. *$\mathfrak{B}_0$ ist die von allen $\mathfrak{C}_k$ erzeugte Gruppe.*

3. *$\mathfrak{B}_k$ ist eine Obergruppe von $\mathfrak{B}_{k-1}$ und $\mathfrak{B}_k/\mathfrak{B}_{k-1}$ ist vom Typus (p^∞).*

4. *$\mathfrak{A}$ ist die von allen $\mathfrak{B}_k$ erzeugte Gruppe.*

Ich schicke zwei Bemerkungen voraus, durch die der Satz auf einen einfacheren zurückgeführt wird:

Ist $\mathfrak{C}$ eine Servanzuntergruppe einer primären Gruppe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ nach § 8 ein Servanzkomplement in $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$, also auch in $\mathfrak{A}$, folglich $\mathfrak{B}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$.

Ist eine primäre Gruppe $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von Gruppen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, ... und setzt man $\mathfrak{B}_0$ gleich der Einheit, weiter

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2, \quad \ldots,$$

so bilden die Gruppen $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ als direkte Faktoren von $\mathfrak{A}$ eine Folge von Servanzuntergruppen von $\mathfrak{A}$. Es ist ferner $\mathfrak{B}_k/\mathfrak{B}_{k-1}$ zu $\mathfrak{C}_k$ isomorph und $\mathfrak{A}$ die von allen $\mathfrak{B}_k$ erzeugte Gruppe.

Ich brauche jetzt nur noch den Satz zu beweisen:

In jeder abzählbaren primären Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es eine Servanzuntergruppe $\mathfrak{B}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathfrak{B}$ ist das direkte Produkt von Gruppen, die durch ein Element erzeugt werden.

2. $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ist das direkte Produkt von Gruppen vom Typus (p^∞). Dabei ist natürlich zuzulassen, daß die Anzahl der direkten Faktoren von $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ gleich 0 ist.

Um eine solche Gruppe $\mathfrak{B}$ zu bilden, bezeichne ich wieder für $e = 0, 1, 2, \ldots$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{A}$, deren Höhenexponenten mindestens gleich e sind, mit $\mathfrak{H}_e$. Nach § 14 ist dann $\overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ ein direkter Faktor von $\overline{\mathfrak{H}}_e$. Man kann also für jedes e eine Gruppe $\mathfrak{A}_e$ so bestimmen, daß $\overline{\mathfrak{H}}_e = \mathfrak{A}_e \times \overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ wird. Die Gruppen $\mathfrak{A}_e$, die man so erhält, sind nach § 1 unabhängig. Man stelle nun dadurch eine Zerlegung von $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots$ in Gruppen $\{B_1\}, \{B_2\}, \ldots$ vom Typus (p) her, daß man jede Gruppe $\mathfrak{A}_e$ einzeln nach § 14 in solche direkten Faktoren zerlegt. Gehört das Element B_k zu $\mathfrak{A}_e$, so sei $\mathfrak{B}_k$ die durch eine Wurzel der Gleichung $X^{p^e} = B_k$ erzeugte Gruppe. Die Gruppen $\mathfrak{B}_k$ sind nach § 15, I. unabhängig. Setzt man $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots$, so wird also

$$\overline{\mathfrak{B}} = \{B_1\} \times \{B_2\} \times \ldots = \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots$$

Aus der Bildungsweise der Gruppen $\mathfrak{A}_e$ folgt, daß jedes Element von $\mathfrak{A}_e$ mit Ausnahme der Einheit in $\mathfrak{A}$ den Höhenexponenten e besitzt und daß jedes Element von $\overline{\mathfrak{B}}$, dessen Höhenexponent in $\mathfrak{A}$ größer als e ist, in $\mathfrak{A}_{e+1} \times \mathfrak{A}_{e+2} \times \ldots$ enthalten ist. Daher ist der Höhenexponent jedes Elementes von $\overline{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{A}$ gleich dem Minimum der Höhenexponenten seiner Komponenten in bezug auf die Zerlegung in $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$ oder auch in bezug auf die Zerlegung in $\{B_1\}, \{B_2\}, \ldots$, folglich gleich seinem Höhenexponenten in $\mathfrak{B}$. Nach § 15, III. ist $\mathfrak{B}$ also eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ und ist Γ eine Nebengruppe von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ vom Ordnungsexponenten 1, so enthält Γ nach § 8 ein Element C vom Ordnungsexponenten 1. Hat C in $\mathfrak{A}$ den endlichen Höhenexponenten e, ist C also ein

Element von $\overline{\mathfrak{H}}_e$, so ist die $\overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$-Komponente von C in bezug auf die Zerlegung $\overline{\mathfrak{H}}_e = \mathfrak{A}_e \times \overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ wieder ein Element aus Γ vom Ordnungsexponenten 1. Daraus folgt, daß die Höhenexponenten der in Γ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{A}$ keine endliche obere Schranke haben. Daher hat Γ in $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ den Höhenexponenten ∞.

Ich brauche jetzt nur noch zu beweisen: Ist $\mathfrak{A}$ eine abzählbare primäre Gruppe, in der jedes Element von $\overline{\mathfrak{A}}$ den Höhenexponenten ∞ hat, so ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von Gruppen vom Typus (p^∞). Beweis: Nach § 15, II. hat jedes Element von $\mathfrak{A}$ den Höhenexponenten ∞. Daraus folgt, daß jedes Element von $\mathfrak{A}$ in einer Gruppe vom Typus (p^∞) enthalten ist. Zerlegt man nun $\overline{\mathfrak{A}}$ nach § 14 in direkte Faktoren vom Typus (p), $\overline{\mathfrak{A}} = \{B_1\} \times \{B_2\} \times \ldots$, und bezeichnet man mit $\mathfrak{B}_k$ eine Gruppe vom Typus (p^∞), in der B_k enthalten ist, so sind die Gruppen $\mathfrak{B}_k$ nach § 15, I. unabhängig. Setzt man $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots = \mathfrak{B}$, so ist $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}$. Da ferner jedes Element von $\overline{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{B}$ einen unendlichen Höhenexponenten hat, folgt aus § 15, III. und IV., daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ sein muß.

§ 17.

Eine abzählbare[6]) *primäre Gruppe ist dann und nur dann das direkte Produkt von Gruppen vom Range* 1, *wenn jedes ihrer Elemente vom Höhenexponenten* ∞ *in einer Untergruppe vom Typus* (p^∞) *enthalten ist.*

Ist die primäre Gruppe $\mathfrak{A}$ als das direkte Produkt von Gruppen $\mathfrak{C}_k$ vom Range 1 dargestellt und hat das Element A den Höhenexponenten ∞, so ist A nach § 7 in dem direkten Produkt $\mathfrak{B}$ der $\mathfrak{C}_k$, welche den Typus (p^∞) haben, enthalten. In $\mathfrak{B}$ besitzt jedes Element einen unendlichen Höhenexponenten. Daraus folgt aber, daß jedes Element von $\mathfrak{B}$ einer Untergruppe vom Typus (p^∞) angehört. Damit ist bewiesen, daß die Bedingung notwendig ist. Ich habe jetzt zu zeigen, daß sie hinreichend ist.

Es sei wieder $\mathfrak{H}_k$ die Gruppe der Elemente der abzählbaren primären Gruppe $\mathfrak{A}$, deren Höhenexponenten in $\mathfrak{A}$ mindestens gleich k sind, und $\mathfrak{A}_k$ eine Gruppe, für welche $\overline{\mathfrak{H}}_k = \mathfrak{A}_k \times \overline{\mathfrak{H}}_{k+1}$ wird. Die Gruppe der Elemente von $\overline{\mathfrak{A}}$ mit unendlichem Höhenexponenten sei $\mathfrak{A}_\infty$. Da die Gruppen $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots$ und $\mathfrak{A}_\infty$ unabhängig sind, gibt es eine Gruppe $\mathfrak{C}$, für die

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{A}_\infty \times \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots$$

wird. Nach dem Typus von $\mathfrak{C}$ unterscheide ich mehrere Fälle:

---

[6]) Die Abzählbarkeit ist wesentlich. Vgl. meine Dissertation, § 26.

1. Besteht $\mathfrak{C}$ nur aus der Einheit, so zerlege man jede der Gruppen $\mathfrak{A}_\infty, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$ in direkte Faktoren vom Typus (p) und ersetze dann wie in § 16 jeden dieser direkten Faktoren, je nachdem, welcher Gruppe $\mathfrak{A}_\infty, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$ er angehört, durch eine Obergruppe vom Typus (p^∞), $(p^1), (p^2), \ldots$. Die so erhaltenen Gruppen vom Range 1 sind nach § 15, I. unabhängig. Durch dieselben Schlüsse wie in § 16 folgt sodann aus § 15, III. und IV., daß ihr direktes Produkt gleich $\mathfrak{A}$ ist. Damit ist für den Fall 1. bewiesen, daß $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von Gruppen vom Range 1 ist.

Der Fall 1. muß stets eintreten, wenn $\mathfrak{A}$ keine unendliche Elementenfolge enthält, in der jedes Element einen größeren Höhenexponenten als das vorangehende besitzt. Denn für einen gewissen Wert e muß dann jedes Element von $\mathfrak{H}_e$ den Höhenexponenten ∞ besitzen. Nach einem in § 10 bewiesenen Satze ist aber jedes Element von $\mathfrak{A}$ mit unendlichem Höhenexponenten in einer Gruppe vom Typus (p^∞) enthalten. Es ist also $\overline{\mathfrak{H}}_e = \mathfrak{A}_\infty$ und demnach

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{e-1} \times \mathfrak{A}_\infty .$$

Hierdurch ist die Zerlegbarkeit der Gruppen, die keine unendliche Folge von Elementen mit wachsendem Höhenexponenten enthalten, zum zweiten Male bewiesen [7]).

2. Die Gruppe $\mathfrak{C}$ werde von einem Element C_e erzeugt, das in $\mathfrak{A}$ den Höhenexponenten e hat. Aus der Gleichung $\overline{\mathfrak{H}}_e = \mathfrak{A}_e \times \overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ folgt dann die Existenz eines Elementes A_e von $\mathfrak{A}_e$, für welches $C_e A_e^{-1} = C_f$ einen Höhenexponenten $f > e$ hat. Nach § 14 ist $\{A_e\}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{A}_e$. Man kann also $\mathfrak{A}_e = \{A_e\} \times \mathfrak{B}_e$ setzen. Das Element C_e ist nicht in $\mathfrak{B}_e \times \overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ enthalten. Denn sonst müßte die $\mathfrak{A}_e$-Komponente von C_e in bezug auf die Zerlegung von $\overline{\mathfrak{H}}_e$ in $\mathfrak{A}_e$ und $\overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ zu $\mathfrak{B}_e$ gehören. Daher ist die Gruppe $\{C_e\}$ von $\mathfrak{B}_e \times \overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ unabhängig. Da ferner A_e in $\{C_e\} \times \overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$ enthalten ist, wird $\overline{\mathfrak{H}}_e = \mathfrak{A}'_e \times \overline{\mathfrak{H}}_{e+1}$, wenn $\mathfrak{A}'_e = \{C_e\} \times \mathfrak{B}_e$ gesetzt wird. Aus

$$\{A_e\} \times \{C_e\} = \{A_e\} \times \{C_f\}$$

folgt weiter

$$\{C_e\} \times \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots = \{C_f\} \times \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots$$

Man kann daher aus C_f durch dasselbe Verfahren eine entsprechende

[7]) Der hierin enthaltene, sehr einfache Beweis für die Zerlegbarkeit der endlichen primären Gruppen steht in engem Zusammenhang mit dem Beweise von Herrn R. Remak, Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in zyklische teilerfremde Faktoren, Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik **141** (1912), S. 245–250. Herr Remak geht jedoch nicht von der Gruppe $\overline{\mathfrak{A}}$, sondern von der Gruppe $\mathfrak{H}_0/\mathfrak{H}_1$ aus.

Gruppe $\mathfrak{A}_f'$ und ein in $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots$ nicht enthaltenes Element C_g vom Höhenexponenten $g > f$ herleiten. Dieses Verfahren setze man ins Unendliche fort. Ist noch $\mathfrak{A}_k' = \mathfrak{A}_k$, wenn k keine der Zahlen $e, f, g, \ldots$ ist, so wird allgemein $\overline{\mathfrak{H}}_k = \mathfrak{A}_k' \times \overline{\mathfrak{H}}_{k+1}$. Da A_e in $\mathfrak{A}_e' \times \mathfrak{A}_f'$, A_f in $\mathfrak{A}_f' \times \mathfrak{A}_g'$, usw., ferner C_e in $\mathfrak{A}_e'$ enthalten ist, wird

$$\{C_e\} \times \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots = \mathfrak{A}_0' \times \mathfrak{A}_1' \times \ldots .$$

Damit ist dieser Fall auf 1. zurückgeführt.

3. Den Fall, daß $\mathfrak{C}$ eine endliche Gruppe ist, führt man durch mehrmalige Anwendung der bei 2. vorgenommenen Umformung auf 1. zurück.

4. Ist $\mathfrak{C}$ abzählbar unendlich,

$$\mathfrak{C} = \{C\} \times \{C'\} \times \{C''\} \times \ldots,$$

so hat man die obige Umformung unendlich oft vorzunehmen. Das wird durch zwei Bemerkungen ermöglicht, die ich noch an das Verfahren unter 2. anknüpfe. Erstens kann man statt von C_e von vornherein von jedem der Elemente $C_f, C_g, \ldots$ ausgehen. Mit anderen Worten: Man kann den Höhenexponenten von C_e so groß voraussetzen, wie man will. Ist zweitens ein Element von $\mathfrak{A}_k$ in $\mathfrak{A}_l'$ enthalten, so kann l nicht größer sein als die kleinste der Zahlen $e, f, g, \ldots$, welche größer als k ist. Daraus folgt: Für jede Zahl k ist die ganze Gruppe

$$\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$$

in einer Gruppe

$$\mathfrak{A}_0' \times \mathfrak{A}_1' \times \ldots \times \mathfrak{A}_l'$$

enthalten, wenn l genügend groß gewählt wird. Ich wähle nun die Höhenexponenten $e, e', e'', \ldots$ der Elemente $C, C', C'', \ldots$ nach folgendem Prinzip: Hat man durch n Umformungen bereits eine Gleichung

$$\{C\} \times \{C'\} \times \ldots \times \{C^{(n-1)}\} \times \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots = \mathfrak{A}_0^{(n)} \times \mathfrak{A}_1^{(n)} \times \ldots$$

mit $\overline{\mathfrak{H}}_k = \mathfrak{A}_k^{(n)} \times \overline{\mathfrak{H}}_{k+1}$ erhalten, so werde $e^{(n)}$ so groß angenommen, daß die Gruppe $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ und die endlich vielen Elemente $C, C', \ldots, C^{(n-1)}$ in der Gruppe

$$\mathfrak{A}_0^{(n)} \times \mathfrak{A}_1^{(n)} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{e^{(n)}-1}^{(n)}$$

enthalten sind und daß $e^{(n)} > e^{(n-1)}$ ist. Da die Gruppen $\mathfrak{A}_0^{(n)}, \mathfrak{A}_1^{(n)}, \ldots, \mathfrak{A}_{e^{(n)}-1}^{(n)}$ nach dem n-ten Schritt des Verfahrens nicht mehr geändert werden, wird so erreicht, daß die Gruppe

$$\mathfrak{A}_0' \times \ldots \times \mathfrak{A}_{e'-1}' \times \mathfrak{A}_{e'}'' \times \ldots \times \mathfrak{A}_{e''-1}'' \times \mathfrak{A}_{e''}''' \times \ldots$$

alle Gruppen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$ und alle Elemente $C, C', \ldots$ enthält, also mit

$$\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1 \times \ldots$$

übereinstimmt. Damit ist auch Fall 4. auf 1. zurückgeführt.

§ 18.

Bisher ist noch die Frage unentschieden geblieben, ob es überhaupt abzählbare primäre Gruppen gibt, welche nicht direkte Produkte von Gruppen des Ranges 1 sind. Mit Hilfe des im vorigen Paragraphen bewiesenen Kriteriums werde ich jetzt ein Beispiel für eine solche Gruppe angeben [8]).

Es sei $F = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ eine unendliche Folge rationaler Zahlen. Ist $F' = (a_0', a_1', a_2', \ldots)$ eine zweite solche Folge, so setze ich dann und nur dann $F = F'$, wenn alle Differenzen $a_k - a_k'$ ganze Zahlen sind. Genauer ist F also als Folge der durch $a_0, a_1, a_2, \ldots$ repräsentierten Restklassen mod 1 zu definieren. Da man Restklassen in eindeutiger Weise addieren und subtrahieren kann, wird durch die Definition

$$F \cdot F' = (a_0 + a_0', a_1 + a_1', a_2 + a_2', \ldots)$$

die Menge aller Folgen zu einer Gruppe. Die Menge der Elemente dieser Gruppe ist allerdings von der Mächtigkeit des Kontinuums. Setzt man aber, für eine beliebige Primzahl p,

$$\begin{aligned} B_1 &= (0,\ p^{-1},\ 0\ ,\ 0\ ,\ \ldots), & C_1 &= (p^{-2},\ p^{-1},\ p^{-1},\ p^{-1},\ \ldots),\\ B_2 &= (0,\ 0\ ,\ p^{-2},\ 0\ ,\ \ldots), & C_2 &= (p^{-3},\ 0\ ,\ p^{-2},\ p^{-2},\ \ldots),\\ B_3 &= (0,\ 0\ ,\ 0\ ,\ p^{-3},\ \ldots), & C_3 &= (p^{-4},\ 0\ ,\ 0\ ,\ p^{-3},\ \ldots),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so ist die Gruppe

$$\mathfrak{A} = \{B_1, B_2, B_3, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots\}$$

abzählbar, weil sie von abzählbar vielen Elementen erzeugt wird.

Jedes Element A der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist in einer durch endlich viele Elemente B_k und C_k erzeugten Gruppe, also, mit Rücksicht auf die Gleichung $C_k = B_k C_{k+1}^p$, von einem gewissen n an in jeder der Gruppen

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_n, C_{n+1}^p\}$$

enthalten, also von der Form

$$A = \left(\frac{a_0}{p^{n+1}}, \frac{a_1}{p^1}, \frac{a_2}{p^2}, \ldots, \frac{a_n}{p^n}, \frac{a_0}{p^n}, \frac{a_0}{p^n}, \ldots\right),$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ganze Zahlen sind. Daraus folgt zunächst, daß $A^{p^{n+1}}$ gleich dem Einheitselement wird, daß also $\mathfrak{A}$ eine zu p gehörige primäre Gruppe ist. Existiert ferner in $\mathfrak{A}$ ein Element A', das der Gleichung $A'^{p^e} = A$ genügt, und ist

[8]) Durch dieses Beispiel wird Satz 4 der Levischen Arbeit widerlegt.

$$A' = \left(\frac{a_0'}{p^{m+1}}, \frac{a_1'}{p^1}, \frac{a_2'}{p^2}, \ldots, \frac{a_m'}{p^m}, \frac{a_0'}{p^m}, \frac{a_0'}{p^m}, \ldots\right),$$

wobei $m > n$ angenommen werden kann, so muß

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv a_1' p^e \pmod{p^1}, \\ &a_2 \equiv a_2' p^e \pmod{p^2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_n \equiv a_n' p^e \pmod{p^n}, \end{aligned} \qquad a_0 \equiv a_{n+1}' p^{e-1} \pmod{p^n}$$

sein. Demnach kann A nur dann einen unendlichen Höhenexponenten in $\mathfrak{A}$ besitzen, wenn

$$A = \left(\frac{a}{p}, 0, 0, \ldots, 0, a, a, \ldots\right)$$

ist, wo a eine ganze Zahl bedeutet, wenn also A in $\{C_1^p\}$ enthalten ist. Dann hat A aber auch den Höhenexponenten ∞. Denn es ist

$$C_1^p = C_2^{p^2} = C_3^{p^3} = \ldots.$$

Daher ist C_1^p ein Element von $\mathfrak{A}$ mit unendlichem Höhenexponenten, das in keiner Untergruppe von $\mathfrak{A}$ vom Typus (p^∞) enthalten ist.

Damit ist bewiesen:

Es gibt abzählbare primäre Gruppen, die nicht direkte Produkte von Gruppen vom Range 1 *sind.*

Ferner ergibt sich jetzt aus der Schlußbemerkung in § 12:

Es gibt abzählbare primäre Gruppen, die direkte Produkte von Gruppen vom Range 1 *sind, ohne daß sie alle ihre Servanzuntergruppen zu direkten Faktoren haben.*

(Eingegangen am 22. Oktober 1921.)

Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper.

Vierte Abhandlung.

Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Erstes Kapitel. Permanenter Bewegungszustand eines Ringes von geringer Dichte bei Vorhandensein eines störenden Körpers.

§ 1. Grundgleichungen.

§ 2. Ein System linearer Differentialgleichungen. Periodische Lösungen.

§ 3. Bestimmung periodischer Lösungen der Integro-Differentialgleichungen (25) und (26) durch sukzessive Approximationen.

Zweites Kapitel. Freie Schwingungen eines Ringes von geringer Dichte.

§ 1. Grundgleichungen.

§ 2. Auflösung der Integro-Differentialgleichungen (8) und (9).

§ 3. Diskussion der Verzweigungsgleichung.

§ 4. Weitere periodische Lösungen.

Drittes Kapitel. Ein Ring von beliebiger Dichte. Unendlich kleine Schwingungen. Stabilitätsbetrachtungen.

Viertes Kapitel. Ein Hilfssatz.

In dem Ursprung eines ebenen kartesischen Koordinatensystems ξ, η möge sich eine punktförmige Masse M befinden. Auf der Kreislinie $C: \xi^2 + \eta^2 = R^2$ sei ferner eine Massenbelegung konstanter Dichte μ für die Längeneinheit verteilt. Die einzelnen Teilchen können sich, unbehindert

durch die Nachbarteilchen, nach allen Richtungen hin frei bewegen und üben keinerlei Spannkräfte aufeinander aus[1]).

Die einzelnen Massen sind durch Gravitationskräfte aneinander geknüpft. Die zwischen zwei in einer Entfernung r_{12} befindlichen Massen m_1 und m_2 wirkende Kraft soll den Wert

$$(1) \qquad -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}},$$

der auf das logarithmische Potential führt, haben[1a]). Ein statisches Gleichgewicht kann natürlich nicht bestehen. Nimmt man aber an, daß das ganze System mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(2) \qquad \omega = \frac{\varkappa^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}} (M + \pi \mu R)^{\frac{1}{2}}$$

um den Koordinatenursprung gleichförmig rotiert, so wird ein dynamisches Gleichgewicht wegen der hinzutretenden Zentrifugalkräfte möglich.

Dieser Bewegungszustand wird gestört, sobald dem System eine weitere punktförmige Masse $\mathfrak{M}$ hinzugefügt wird. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{M}$ um den Körper M, der festgehalten wird, in der Ebene ξ, η gleichförmig rotiert. Die Entfernung der Masse $\mathfrak{M}$ von dem Koordinatenursprung heiße $\mathfrak{R}$, die Winkelgeschwindigkeit sei β. Wie in dem ersten Kapitel gezeigt wird, *ist im allgemeinen für hinreichend kleine Werte von* $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ *und* μ *ein periodischer Bewegungszustand des Systems möglich.* Seine Bestimmung hängt mit der Bestimmung periodischer Lösungen einer nicht linearen Integro-Differentialgleichung zusammen, die durch sukzessive Approximationen erfolgt. Der Konvergenznachweis stützt sich wesentlich auf einen Hilfssatz aus der

---

[1]) Betrachten wir irgendeine Verrückung der mit Masse belegten Kreislinie $\xi^2 + \eta^2 = R^2$, bei der der Punkt $P_0(\xi, \eta)$ in $\dot{P}_0(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$ übergeht, unter $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ Ortsfunktionen auf C verstanden, die stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Geht dabei das Bogenelement $d\dot{s}$ in P_0 in $d\dot{s}$ über, so wird die Dichte $\dot{\mu}$ der Masse in $\dot{P}_0$ der Gleichung $\dot{\mu}\, d\dot{s} = \mu\, ds$ gemäß festgesetzt. Die Dichte $\dot{\mu}$ als Ortsfunktion auf C aufgefaßt, hat augenscheinlich stetige Ableitung erster Ordnung.

Bei physikalischen und astronomischen Anwendungen hat man sich vorzustellen, daß die einzelnen Massenteilchen einander nicht berühren und μ die mittlere Dichte der Belegung darstellt. Die Gleichung $\dot{\mu}\, d\dot{s} = \mu\, ds$ ist die Kontinuitätsgleichung.

[1a]) Macht man die üblichen Ansätze für die Komponenten der Kräfte, die von der Gravitation des Ringes auf irgendeines seiner Teilchen herrühren, so kommt man auf Integrale, die nicht unbedingt konvergieren, jedoch bestimmte Cauchysche Hauptwerte haben. Das gleiche gilt, wenn der Ring eine in der vorstehenden Fußnote beschriebene Deformation erleidet. Diese Hauptwerte betrachten wir als Anziehungskräfte in unserem dynamischen Modell. Man kommt auf diese Ausdrücke, wenn man sich die gravitierende Masse zunächst über n gleich große einander paarweise berührende Kreise verteilt denkt und nachher zur Grenze $n \to \infty$ übergeht.

Theorie des logarithmischen Potentials. Der Beweis dieses Hilfssatzes, bei dem manche analytische Schwierigkeiten zu überwinden waren, ist in dem vierten Kapitel wiedergegeben.

In dem zweiten Kapitel werden kleine (*endliche*) periodische Bewegungen des Systems in der Nachbarschaft des dynamischen Gleichgewichtszustandes bei Abwesenheit eines störenden Körpers untersucht. *Es gibt bei hinreichend kleinem μ periodische Bewegungszustände, die sich als fortschreitende Wellen charakterisieren lassen.* Die Dauer einer Periode hängt von dem maximalen Ausschlag aus der Gleichgewichtslage ab, — diese Abhängigkeit tritt freilich erst in den Gliedern höherer Ordnung zum Vorschein.

Will man die Stabilität des von uns betrachteten dynamischen Modells untersuchen, so muß man die Voraussetzung, die Dichte μ sei klein, fallen lassen. Eine strenge Behandlung der Integro-Differentialgleichungen der Bewegung zwecks Bestimmung etwaiger periodischer Lösungen erfordert jetzt einige weiterreichende Hilfsmittel; sie bleibt einer späteren Gelegenheit vorbehalten. Zur Gewinnung von Stabilitätskriterien nach der „Methode der kleinen Schwingungen" genügt es indessen, unendlich kleine Schwingungen zu betrachten. Die Bestimmung unendlich kleiner Schwingungen bildet den Inhalt des dritten Kapitels dieser Arbeit.

Sei M' die Gesamtmasse des Ringes, M, wie vorhin, die Masse des Zentralkörpers. *Einer jeden natürlichen Zahl* $m < m_0 = \frac{4M}{M'} + 2$ *entsprechen vier „stabile" Bewegungszustände des Ringes, die in zwei verschiedene Gruppen zerfallen und als fortschreitende Wellen aufgefaßt werden können.* Für kleine m ist die Dauer einer vollen Schwingung der ersten Gruppe mit der Umlaufsdauer des Ringes vergleichbar, die der zweiten Gruppe ist wesentlich länger. Die Schwingungen der zweiten Gruppe sind auch für $m \geqq m_0$ „stabil". Nach H. Struve ist das Verhältnis der Masse des Saturn zur Gesamtmasse seiner Ringe größer als 100 000. Nehmen wir in dem von uns betrachteten „ebenen" Modell $M : M' = 100\,000$ an, so finden wir, daß die ersten $4 \cdot 10^5$ Schwingungen der ersten Gruppe „stabil" sind. Der Ring ist darum gewiß als „praktisch stabil" zu betrachten.

Vom Interesse ist der besondere Fall $M = 0$. *Hier handelt es sich um einen Ring ganz ohne Zentralkörper.* Jetzt sind die Grundschwingungen der ersten Gruppe sowie alle Schwingungen der zweiten Gruppe „stabil".

In seinen bekannten Untersuchungen über die Theorie der Saturnringe hatte Maxwell[2]) ein ähnliches dynamisches Modell betrachtet. Maxwell

[2]) Vgl. The scientific papers of James Clerk Maxwell, **1**, On the stability of the motion of Saturns Rings, S. 288—377.

dachte sich auf dem Kreise $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ eine endliche Anzahl unter sich gleicher, äquidistanter punktförmiger Massen angebracht; das Anziehungsgesetz war das Newtonsche. Hier wäre der Übergang zu einer kontinuierlich verteilten Linienbelegung nicht zulässig, weil die Anziehungskräfte unendlich große Werte annehmen würden. Maxwell findet, indem er nur Glieder niedrigster Ordnung berücksichtigt, daß periodische, „stabile" Zustände nicht mehr möglich sind, sobald die Gesamtmasse des Ringes eine Schranke von der Form

$$c\,\frac{M}{p^2}$$

übersteigt, unter c eine Konstante, unter p die Anzahl der Satelliten verstanden. Offenbar konvergiert die zulässige Gesamtmasse des Ringes für $p \to \infty$ gegen Null. Die Maxwellschen Ergebnisse werden illusorisch. Dieses Resultat hängt damit zusammen, daß, wie vorhin bemerkt, die Anziehungskräfte des Ringes bei unveränderter Gesamtmasse für $p \to \infty$ gegen ∞ konvergieren. Das eingangs betrachtete dynamische Modell ist frei von diesem Nachteil, es entspricht allerdings einem „ebenen" Problem, das, wie folgt, anders gefaßt werden kann. Auf der Mantelfläche eines beiderseits unbegrenzten geraden Kreiszylinders von der Basis $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ ist ein nach dem Newtonschen Gesetz gravitierendes Medium gleichmäßig verteilt. Die Zylinderachse, die festgehalten wird, ist ebenfalls mit Masse konstanter Längendichte bedeckt. Gefragt wird nach periodischen Bewegungszuständen des Zylindermantels, wenn angenommen wird, daß sich jede Mantellinie nur parallel zu sich selbst verschieben kann, daß die Bahn eines jeden Massenpunktes in einer Normalebene des Zylinders liegt, und daß es keinerlei Spannkräfte gibt. Es macht keine Schwierigkeiten, von hier aus zu dem folgenden Modell als Repräsentanten des Saturnsystems zu gelangen. Als Zentralkörper tritt eine im Koordinatenursprung festgehaltene punktförmige Masse, als Saturnring der zwischen zwei einander nahe liegenden Normalschnitten der Zylinderfläche enthaltene Flächenstreifen. Alle qualitativen Resultate dieser Abhandlung bleiben dabei erhalten. Auf diesen Gegenstand soll an einer anderen Stelle näher eingegangen werden.

Noch eine letzte einleitende Bemerkung. Das in dieser Arbeit behandelte materielle System bildet ein Beispiel eines kontinuierlichen, „vollkommen inkohärenten" (staub- oder wolkenartigen) Mediums. Eine allgemeine Untersuchung solcher Medien dürfte für die Astrophysik nicht ohne Interesse sein, scheint es doch, daß dynamische Systeme dieser Art uns nicht allein in den Saturnringen, sondern auch an manchen anderen Stellen des Universums entgegentreten[3]).

[3]) Man vergleiche hierzu meine vor kurzem erschienene Schrift, „Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung. Mathematische Probleme in der Theorie der

Erstes Kapitel.

Permanenter Bewegungszustand eines Ringes von geringer Dichte bei Vorhandensein eines störenden Körpers.

§ 1.

Grundgleichungen.

Wir gehen vom dynamischen Gleichgewichtszustande bei Abwesenheit eines störenden Körpers aus und beziehen die Lage des Ringes auf ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z, dessen Ursprung mit dem Ursprung des Systems ξ, η und dessen x, y-Ebene mit der Ebene ξ, η zusammenfällt. Wir nehmen an, daß das System x, y, z um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig rotiert. Zur Zeit $t = 0$ sollen die beiden Achsenpaare x, ξ; y, η koinzidieren. Die Lage eines bestimmten Massenteilchens P_0 des Ringes (Fig. 1) ist durch seine Polarkoordinaten

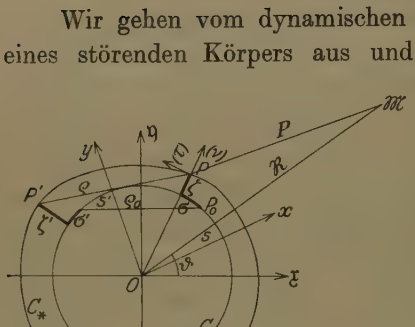

Fig. 1.

$R, \frac{s}{R}$ in bezug auf das rotierende Achsenkreuz vollkommen bestimmt[4]). Tritt eine störende Kraft hinzu, so wird das Teilchen P_0 im Laufe der Zeit seine Lage gegen die rotierenden Achsen, allgemein zu reden, ändern, seine Polarkoordinaten werden die Werte

$$R + \zeta, \quad \frac{s+\sigma}{R}, \tag{3}$$

unter ζ und σ gewisse Funktionen der Amplitude $\frac{s}{R}$ und der Zeit t verstanden, annehmen.

Im Laufe der weiteren Betrachtungen wird es sich stets um kleine Bewegungen handeln. Wir wollen ein für allemal $|\zeta| < R$ voraussetzen.

Figur der Himmelskörper", Leipzig bei S. Hirzel, 1923. In § 4 des dritten Kapitels werden dort die Anfangsentwicklungen dieser Arbeit wiedergegeben, worauf die Bewegungsgleichungen eines dynamischen Modells abgeleitet werden, das insofern über das hier betrachtete hinausgeht, als die um M kreisende Masse über eine Anzahl koaxialer Rotationskörper rechteckigen Querschnitts verteilt ist. Als das Anziehungsgesetz wird das Newtonsche angenommen.

[4]) Hier ist s die von dem Punkte $(R, 0)$ bis zu dem gerade betrachteten Punkte gezählte Länge des Bogens des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$.

Es gilt jetzt

$$(4)\qquad \xi = (R+\zeta)\cos\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right), \qquad \eta = (R+\zeta)\sin\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right),$$

mithin

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -(R+\zeta)\left(\omega + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\sin\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\cos\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= (R+\zeta)\left(\omega + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\cos\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\sin\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right), \end{aligned}$$

so daß die kinetische Energie T den Wert

$$(6)\qquad \mathsf{T} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}(R+\zeta)^2\left(\omega + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2$$

hat. Man findet weiter leicht die Formeln

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)}\right) - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \zeta} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - (R+\zeta)\left(\omega + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)^2, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)}\right) - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \sigma} &= \frac{1}{R^2}(R+\zeta)^2\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R+\zeta)\left(\omega + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{aligned}$$

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Massenpunktes $\left(R, \frac{s}{R}\right)$ sind demnach

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - (R+\zeta)\left(\omega + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)^2 &= Q_\zeta, \\ \frac{1}{R^2}(R+\zeta)^2\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R+\zeta)\left(\omega + \frac{1}{R}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= Q_\sigma. \end{aligned}$$

Hier bezeichnen $Q_\zeta\,\delta\zeta$ und $Q_\sigma\,\delta\sigma$ virtuelle Arbeiten der Gravitationskräfte, die auf eine in $\left(R+\zeta, \frac{s+\sigma}{R}\right)$ befindliche Einheit der Masse wirken, bei ihrem Übergang in die Punkte $\left(R+\zeta+\delta\zeta, \frac{s+\sigma}{R}\right)$ bzw. $\left(R+\zeta, \frac{s+\sigma+\delta\sigma}{R}\right)$.

Sei C_* der geometrische Ort der Punkte $P = \left(R+\zeta, \frac{s+\sigma}{R}\right)$. Dem Bogenelement ds von C entspricht das Bogenelement ds_* auf C_*. Wird die Liniendichte in s_* auf C_* mit μ_* bezeichnet, so gilt die Kontinuitätsgleichung

$$(9)\qquad \mu\,ds = \mu_*\,ds_*.\ ^{5})$$

---

[5]) Vgl. die Fußnote [1]). Augenscheinlich kann man *einen* Punkt des gestörten Ringes einem beliebigen Punkte des Kreises $x^2+y^2=R^2$ zuordnen. Ist aber die Wahl einmal getroffen, so ist damit auch die paarweise Zuordnung aller übrigen Punkte der beiden Figuren vollkommen bestimmt. Wegen (9) ist nämlich

$$\int \mu\,ds = \int \mu_*\,ds_*,$$

die Integration links und rechts zwischen zusammengehörigen Punktepaaren auf C und C_* erstreckt gedacht.

Sei ϱ die Entfernung des Punktes $P = \left(R+\zeta, \frac{s+\sigma}{R}\right)$ von einem beliebigen Punkte $P' = \left(R+\zeta', \frac{s'+\sigma'}{R}\right)$ auf C_*. Der von der Eigengravitation des Ringes herrührende Beitrag zu Q_ζ hat den Wert

$$(10) \qquad \varkappa \int_{C_*} \mu'_* \, ds'_* \, \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho} = \varkappa \int_C \mu \, ds' \, \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho}.$$

Hier bezeichnet ds'_* das Bogenelement der Kurve C_* im Punkte P'; die Massendichte ist dort gleich μ'_*. Ferner bezeichnet das Symbol $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Ableitung in der Richtung der Normale zu C in P (Fig. 1). Die Integrale (10) sind als Cauchysche Hauptwerte aufzufassen. Wie in dem vierten Kapitel gezeigt wird, ist der Hauptwert gewiß vorhanden und stetig, wenn, wie vorausgesetzt werden soll, ζ und σ, als Funktionen von s aufgefaßt, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Man kommt auf den Ausdruck (10) für die Anziehungskraft, wenn man sich die gravitierende Masse zunächst über n gleich große, einander berührende Kreise, deren Mittelpunkte auf C_* liegen, verteilt denkt und nachher zur Grenze $n \to \infty$ übergeht.

Der Beitrag der Gravitationskräfte des Ringes zu Q_σ hat, wie man sich leicht überzeugt, den Wert

$$(11) \qquad \varkappa \left(1+\frac{\zeta}{R}\right) \int_{C_*} \mu'_* \, ds'_* \, \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho} = \varkappa \left(1+\frac{\zeta}{R}\right) \int_C \mu \, ds' \, \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho},$$

unter $\frac{\partial}{\partial \tau}$ die Ableitung in der Richtung senkrecht auf (ν) in P verstanden (Fig. 1)[6]).

Ist die Entfernung des störenden Körpers $\mathfrak{M}$ von P gleich P, so sind die von seiner Anziehung herrührenden Beiträge zu Q_ζ und Q_σ entsprechend gleich

$$(12) \qquad \varkappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\mathsf{P}} \quad \text{und} \quad \varkappa \left(1+\frac{\zeta}{R}\right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\mathsf{P}}.$$ [7])

---

[6]) In der Tat ist z. B., unter $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ vorübergehend die Komponenten der betrachteten Gravitationskräfte in der Richtung der ξ- und der η-Achse verstanden, der gesuchte Beitrag zu Q_σ gleich

$$\left(\mathfrak{X}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\right) \delta\sigma = \delta\sigma \left\{ -\mathfrak{X} \sin\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right) + \mathfrak{Y} \cos\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R}\right) \right\} \frac{R+\zeta}{R}$$

$$= \delta\sigma \varkappa \left(1+\frac{\zeta}{R}\right) \int_{C_*} \mu'_* \, ds'_* \, \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{R}{\varrho}.$$

[7]) Vgl. die Fußnote [6]).

Die Anziehung des Zentralkörpers gibt nur zu Q_ζ einen Beitrag. Dieser hat den Wert

$$-\frac{M\varkappa}{R+\zeta}. \tag{13}$$

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lauten demnach

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-(R+\zeta)\left(\omega+\frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2\\&\qquad=-\frac{M\varkappa}{R+\zeta}+\varkappa\int_C\mu\,ds'\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho}+\varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\mathsf{P}},\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}&(R+\zeta)^2\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}+2(R+\zeta)\left(\omega+\frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\\&\qquad=\varkappa\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\int_C\mu\,ds'\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho}+\varkappa\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\mathsf{P}}.\end{aligned}$$

Sei ϱ_0 der Abstand der Punkte $R, \frac{s}{R}$ und $R, \frac{s'}{R}$ auf C, (ν_0) die nach außen gerichtete Normale, (τ_0) die Tangente in $\left(R, \frac{s}{R}\right)$ zu C. Wie man leicht sieht, ist

$$\int_C\mu\,ds'\frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}=-\pi\mu,\qquad\int_C\mu\,ds'\frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}=0. \tag{15}$$

Mit Rücksicht auf (15) kann man für (14) nach einer naheliegenden Vereinfachung auch setzen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-(R+\zeta)\left(\omega+\frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2+\frac{\varkappa}{R}(M+\pi R\mu)\\&=-M\varkappa\left(\frac{1}{R+\zeta}-\frac{1}{R}\right)+\varkappa\int_C\mu\,ds'\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]+\varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\mathsf{P}},\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}&(R+\zeta)\frac{1}{R}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}+2\left(\omega+\frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial t}\\&=\varkappa\int_C\mu\,ds'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]+\varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\mathsf{P}}.\end{aligned}$$

Beachtet man, daß

$$\omega^2=\frac{\varkappa}{R^2}(M+\pi R\mu) \tag{17}$$

gilt, so kann man die Gleichungen (16) nach einer leichten Umformung auch so schreiben

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \nu\zeta$$

$$= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2 + 2\zeta\omega\frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \zeta\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2 - M\varkappa\frac{1}{R}\left(\frac{\zeta^2}{R^2} - \frac{\zeta^3}{R^3} + \ldots\right)$$

$$+ \varkappa\int_C \mu\, ds'\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right] + \varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\mathsf{P}},$$

(18)

$$R\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + 2R\omega\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

$$= -\zeta\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - 2\frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \varkappa R\int_C \mu\, ds'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right] + \varkappa R\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\tau}\log$$

$$\nu = \omega^2 + M\varkappa\frac{1}{R^2} = 2\omega^2 - \frac{\varkappa\pi\mu}{R}.$$

Sei β die Winkelgeschwindigkeit des Körpers $\mathfrak{M}$, und es seien $\mathfrak{R}$, ϑ seine Polarkoordinaten in der festen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$-Ebene zur Zeit t. Offenbar ist

(19)

$$\vartheta = \vartheta_0 + \beta t, \quad \mathsf{P}^2 = (R+\zeta)^2 + \mathfrak{R}^2 - 2\mathfrak{R}(R+\zeta)\cos\left(\omega t + \frac{s+\sigma}{R} - \right.$$

$$\varrho^2 = (R+\zeta)^2 + (R+\zeta')^2 - 2(R+\zeta)(R+\zeta')\cos\left(\frac{s+\sigma}{R} - \frac{s'+\sigma'}{R}\right).$$

Die Winkelgeschwindigkeit der relativen Bewegung von $\mathfrak{M}$ gegen das rotierende Achsenkreuz (x, y) ist gleich $\beta - \omega = \gamma$. Wir nehmen $\gamma \neq 0$ ein. Wäre $\gamma = 0$, so würde dies bedeuten, daß der störende Körper im rotierenden Achsenkreuz feststeht. Es würde sich dann um ein Problem des relativen Gleichgewichtes handeln. Wir suchen Lösungen der Differentialgleichungen (18) von der Form

(20) $\zeta = \zeta(s,t) = Z(s - R\gamma t) = Z(u), \quad \sigma = \sigma(s,t) = S(s - R\gamma t) = S(u)$

zu bestimmen, unter $Z(u)$ und $S(u)$ periodische Funktionen mit der Periode $2\pi R$ verstanden. — Das von uns betrachtete, auf den Punkt R, s des Kreises C bezogene Massenteilchen des Ringes hat zur Zeit t in der Ebene x, y die Polarkoordinaten

(21) $$R + Z(s - R\gamma t) = R + Z(u), \qquad \frac{s + S(s - R\gamma t)}{R} = \frac{s + S(u)}{R}.$$

Seine Bahn in der x, y-Ebene erhält man, wenn man in (20) s konstant hält. Sie ist eine geschlossene Kurve, die in der Zeit $\frac{2\pi}{\gamma}$ einmal voll beschrieben wird. Hält man in (20) t fest und läßt s das Intervall $(0, 2\pi R)$ beschreiben, so erhält man die vorhin betrachtete Kurve C_*, den geometrischen Ort aller Teilchen des Ringes zur Zeit t in der x, y-Ebene. Sei C_0 der geometrische Ort der Punkte

(22) $$R + Z(s), \qquad \frac{s + S(s)}{R}$$

in der Ebene x, y, d. h. die Lage des Ringes zur Zeit $t = 0$ (Fig. 2). Die Kurve C_* kann man augenscheinlich dadurch gewinnen, daß man C_0 um den Koordinatenursprung durch den Winkel γt im positiven Sinne dreht. Da der Körper $\mathfrak{M}$ in der Zeit t denselben Winkelraum beschreibt, so bleibt die relative Lage der Kurve C_* und des Körpers $\mathfrak{M}$ unverändert. *Die Konfiguration des Systems ändert sich also nicht mit der Zeit.* Freilich verschiebt sich die Lage *eines bestimmten Teilchens* gegen $\mathfrak{M}$ fortwährend.

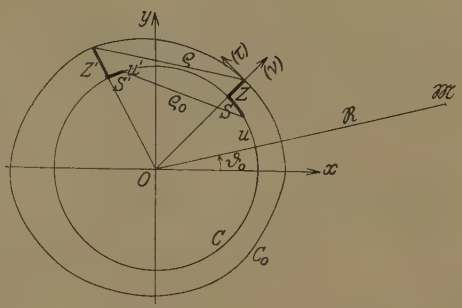

Fig. 2.

Die Polarkoordinaten der Masse $\mathfrak{M}$ zur Zeit $t = 0$ sind offenbar $\mathfrak{R}, \vartheta_0$. Bevor wir die speziellen Funktionen (20) in (18) einsetzen, wollen wir den geometrischen Ort der Punkte

$$R + Z(u), \qquad \frac{u + S(u)}{R} \tag{23}$$

in der Ebene $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ einführen. Dieser ist natürlich die vorhin mit C_0 bezeichnete Kurve, die Lage des Ringes zur Zeit $t = 0$.[8]) Sei $\mathfrak{M}_0$ der Punkt mit den Polarkoordinaten $\mathfrak{R}, \vartheta_0$.

Betrachten wir jetzt wieder das Teilchen, das auf den Punkt (R, s) des Kreises C bezogen wird. Es gilt zunächst

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -R\gamma \frac{dZ}{du}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = R^2\gamma^2 \frac{d^2 Z}{du^2}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -R\gamma \frac{dS}{du}, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = R^2\gamma^2 \frac{d^2 S}{du^2}. \tag{24}$$

Die Lage aller übrigen Teilchen und des Körpers $\mathfrak{M}$ gegen das betrachtete Massenteilchen zur Zeit t ist, wie man nach dem Vorstehenden leicht sieht, dieselbe wie die Lage des Punktes $R + Z(u)$, $\frac{u + S(u)}{R}$ $(u = s - R\gamma t)$ gegen die Kurve C_0 und den Punkt $\mathfrak{M}_0$. Dreht man die Kurve C_* durch den Winkel $-\gamma t$, so fällt sie mit C_0 zusammen. Um nicht neue Buchstaben einführen zu müssen, wollen wir unter $\varrho_0, \varrho, \mathsf{P}, \ldots$ Größen verstehen, die aus den vorhin ebenso bezeichneten Größen durch die vorerwähnte Drehung entstehen (Fig. 2). Es ist also z. B. jetzt ϱ der Abstand der Punkte $R + Z(u)$, $\frac{u + S(u)}{R}$ und $R + Z(u')$, $\frac{u' + S(u')}{R}$.[9]) Aus (18) und (24) folgen nunmehr die weiteren Gleichungen

[8]) Zur Zeit $t = 0$ fallen ja die Achsenkreuze x, y und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ zusammen.

[9]) Für $Z(u')$, $S(u')$ wird kürzer Z', S' geschrieben.

$$
\begin{aligned}
&L_1(Z,S) \equiv R^2\gamma^2\frac{d^2Z}{du^2} + 2R\gamma\omega\frac{dS}{du} - \nu Z \\
&= R\gamma^2\left(\frac{dS}{du}\right)^2 - 2\gamma\omega Z\frac{dS}{du} + \gamma^2 Z\left(\frac{dS}{du}\right)^2 - M\varkappa\frac{1}{R}\left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \cdots\right) \\
&+ \varkappa\int_C \mu\, du'\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right\} + \varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\mathsf{P}} \equiv \Lambda_1(Z,S),
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_2(Z,S) \equiv \gamma^2R^2\frac{d^2S}{du^2} - 2\gamma R\omega\frac{dZ}{du} = -\gamma^2RZ\frac{d^2S}{du^2} - 2\gamma^2R\frac{dS}{du}\frac{dZ}{du} \\
&+ \varkappa\int_C \mu\, du'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right] + \varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\mathsf{P}} \equiv \Lambda_2(Z,S).
\end{aligned} \tag{26}
$$

§ 2.

Ein System linearer Differentialgleichungen. Periodische Lösungen.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Systems der Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
R^2\gamma^2\frac{d^2Z}{du^2} + 2R\gamma\omega\frac{dS}{du} - \nu Z &= F_1(u), \\
R^2\gamma^2\frac{d^2S}{du^2} - 2R\gamma\omega\frac{dZ}{du} &= F_2(u),
\end{aligned} \tag{27}
$$

unter $F_1(u)$ und $F_2(u)$ stetige periodische, reelle oder *komplexe* Funktionen des reellen Argumentes u mit der Periode $2\pi R$ verstanden. Gesucht werden die etwa vorhandenen nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen periodischen Lösungen mit der gleichen Periode.

Das allgemeine Integral der homogenen Differentialgleichungen ($F_1(u) = F_2(u) = 0$) hat, wie man leicht verifiziert, die Form

$$
\begin{aligned}
Z(u) &= B + C\cos\frac{pu}{\gamma R} + D\sin\frac{pu}{\gamma R}, \\
S(u) &= A + B\frac{\nu u}{2R\gamma\omega} + Cq\sin\frac{pu}{\gamma R} - Dq\cos\frac{pu}{\gamma R}, \\
p &= \sqrt{2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}}, \qquad q = \frac{2\omega}{\sqrt{2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}}}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Ist $\sqrt{2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}} = \gamma$, so haben die homogenen Gleichungen drei linear unabhängige Systeme periodischer Lösungen mit der Periode $2\pi R$:

$$
0, R; \qquad R\cos\frac{u}{R}, \quad \frac{2R\omega}{\gamma}\sin\frac{u}{R}; \qquad R\sin\frac{u}{R}, \quad -\frac{2R\omega}{\gamma}\cos\frac{u}{R}. \tag{29}
$$

In diesem Kapitel wird $\gamma^2 \neq 2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}$ *vorausgesetzt.*

Dann gibt es nur ein System periodischer Lösungen mit der Periode $2\pi R$, nämlich $0, R$.

Sei jetzt $\mathfrak{G}(\xi, u)$ die, wie man sich ohne Mühe überzeugt, stets (auch wenn $\gamma^2 = 2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}$ ist) vorhandene periodische Greensche Funktion der Differentialgeichung

$$\frac{d^2Z}{du^2} - \frac{\nu}{\gamma^2R^2}Z = 0, \tag{30}$$

$$\left(\mathfrak{G}(\xi, 0) = \mathfrak{G}(\xi, 2\pi R), \quad \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}(\xi, 0) = \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}(\xi, 2\pi R)\right).\ ^{10})$$

Schreibt man die Gleichungen (27) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d^2Z}{du^2} - \frac{\nu}{\gamma^2R^2}Z &= -2\frac{\omega}{\gamma R}\frac{dS}{du} + \frac{1}{\gamma^2R^2}F_1(u), \\ \frac{d^2S}{du^2} - \frac{\nu}{\gamma^2R^2}S &= 2\frac{\omega}{\gamma R}\frac{dZ}{du} - \frac{\nu}{\gamma^2R^2}S + \frac{1}{\gamma^2R^2}F_2(u), \end{aligned} \tag{31}$$

so findet man zur Bestimmung der etwa vorhandenen periodischen Lösungen nach bekannten Sätzen die Formeln

$$\begin{aligned} Z(\xi) &= 2\frac{\omega}{\gamma R}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)\frac{dS}{du}du - \frac{1}{\gamma^2R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)F_1(u)du, \\ S(\xi) &= -2\frac{\omega}{\gamma R}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)\frac{dZ}{du}du + \frac{\nu}{\gamma^2R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)S(u)du \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)F_2(u)du, \end{aligned} \tag{32}$$

oder nach einer teilweisen Integration die linearen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} Z(\xi) &= -2\frac{\omega}{\gamma R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}(\xi, u)S(u)du - \frac{1}{\gamma^2R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)F_1(u)du, \\ S(\xi) &= 2\frac{\omega}{\gamma R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}(\xi, u)Z(u)du + \frac{\nu}{\gamma^2R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)S(u)du \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}(\xi, u)F_2(u)du. \end{aligned} \tag{33}$$

---

[10]) Das allgemeine Integral von (30) ist

$$C_1 e^{\frac{\nu}{\gamma R}u} + C_2 e^{-\frac{\nu}{\gamma R}u}.$$

Periodische Lösungen mit der Periode $2\pi R$ sind nicht vorhanden. Also existiert, wie bekannt, die Greensche Funktion $\mathfrak{G}$. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{G}$ eine Funktion von $\xi - u$ allein ist.

Die zugehörigen homogenen Integralgleichungen haben, wie vorhin erwähnt, ein System von Nullösungen, nämlich $Z = 0$, $S = R$.

Es gilt demnach, wie man durch Einsetzen von $Z = 0$, $S = R$, $F_1(u) = F_2(u) = 0$ in (33) leicht findet,

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}(\xi, u)\, du = 0, \tag{34}$$

$$\frac{v}{\gamma^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}(\xi, u)\, du = 1, \tag{35}$$

oder wegen $\mathfrak{G}(\xi, u) = \mathfrak{G}(u, \xi)$ auch

$$\frac{v}{\gamma^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}(\xi, u)\, d\xi = 1. \tag{36}$$

Daß die Gleichung (34) gilt, ist übrigens wegen $\mathfrak{G}(\xi, 2\pi) = \mathfrak{G}(\xi, 0)$ selbstverständlich. Aus (35) folgt ferner

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathfrak{G}(\xi, u)\, du = 0. \tag{37}$$

Sei $Z(\xi)$ und $S(\xi)$ ein System von Lösungen der Integralgleichungen (33). Nach bekannten Sätzen haben $Z(\xi)$ und $S(\xi)$ stetige Ableitungen erster Ordnung[11]). Durch teilweise Integration gelangt man von (33) rückwärts zu den Gleichungen (32) und von hier aus, nach Feststellung der Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung, zu den Differentialgleichungen (31).

Wie man weiß, können die Gleichungen (33) durch eine einzige Integralgleichung von der Form

$$Z(\xi) = \int_E K(\xi, u) Z(u)\, du + \Phi(\xi) \tag{38}$$

---

[11]) Es ist z. B.

$$\Lambda(\xi) = \int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}(\xi, u)\, Z(u)\, du = \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}(\xi, u)\, Z(u)\, du + \int_{\xi}^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}(\xi, u)\, Z(u)\, du.$$

Es gilt darum

$$\frac{d}{d\xi} \Lambda(\xi) = \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}(\xi, \xi - 0)\, Z(\xi) + \int_0^{\xi} \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial \xi} \mathfrak{G}(\xi, u)\, Z(u)\, du - \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}(\xi, \xi + 0)\, Z(\xi)$$

$$+ \int_{\xi}^{2\pi R} \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial \xi} \mathfrak{G}(\xi, u)\, Z(u)\, du = Z(\xi) + \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial \xi} \mathfrak{G}(\xi, u)\, Z(u)\, du.$$

ersetzt werden, wenn man als Integrationsgebiet E das zweimal durchlaufene Intervall $(0, 2\pi R)$ annimmt. Die Funktion $Z(\xi)$ ist beim erstmaligen Durchlaufen der Strecke $(0, 2\pi R)$ gleich $Z(\xi)$, bei dem darauffolgenden Passieren desselben Intervalls gleich $S(\xi)$ zu setzen. Die entsprechenden Werte von $\Phi(\xi)$ sind

$$(38^*) \qquad \begin{aligned} \Phi^{(1)}(\xi) &= -\frac{1}{\gamma^2 R^2}\int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}(\xi, u) F_1(u)\, du, \\ \Phi^{(2)}(\xi) &= -\frac{1}{\gamma^2 R^2}\int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}(\xi, u) F_2(u)\, du. \end{aligned}$$

Der Kern $K(\xi, u)$ ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Der erste Umlauf von u	Der zweite Umlauf von u
Der erste Umlauf von ξ	0	$-2\frac{\omega}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}(\xi, u)$
Der zweite Umlauf von ξ	$2\frac{\omega}{\gamma R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}(\xi, u)$	$\frac{v}{\gamma^2 R^2}\mathfrak{G}(\xi, u)$

Die zu (38) gehörige homogene Integralgleichung hat, wie bereits erwähnt, eine Nullösung $W(\xi)$, gleich 0 in dem ersten, gleich R in dem zweiten Intervalle $(0, 2\pi R)$. Damit demnach die Integralgleichung (38), oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (33) Lösungen haben, ist notwendig und hinreichend, daß *eine* Integralbeziehung erfüllt ist. Man findet diese wie folgt.

Betrachten wir die zu (38) adjungierte homogene Integralgleichung

$$(39) \qquad \mathsf{U}(\xi) = \int_E K(u, \xi)\, \mathsf{U}(u)\, du.$$

Sie faßt die folgenden simultanen Integralgleichungen

$$(40) \qquad \begin{aligned} \tilde{Z}(\xi) &= \quad 2\frac{\omega}{\gamma R}\int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial \xi}\mathfrak{G}(\xi, u)\, \tilde{S}(u)\, du, \\ \tilde{S}(\xi) &= -2\frac{\omega}{\gamma R}\int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial \xi}\mathfrak{G}(\xi, u)\, \tilde{Z}(u)\, du + \frac{v}{\gamma^2 R^2}\int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}(\xi, u)\, \tilde{S}(u)\, du \end{aligned}$$

zusammen. Wegen (35) und (37) sind die Funktionen $\tilde{\tilde{Z}}(\xi) = 0$, $\tilde{\tilde{S}}(\xi) = R$ Lösungen dieser Integralgleichungen. Dies ist natürlich, abgesehen von

einem konstanten Faktor, das einzige System von Nullösungen der Gleichungen (40). Dieses heiße, über das Gebiet E erstreckt, einfacher $\tilde{\tilde{W}}(\xi)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Integralgleichung (38) ist demnach

$$(41)\quad \int_E \Phi(\xi)\,\tilde{\tilde{W}}(\xi)\,d\xi = \int_0^{2\pi R} \Phi^{(1)}(\xi)\,\tilde{\tilde{Z}}(\xi)\,d\xi + \int_0^{2\pi R} \Phi^{(2)}(\xi)\,\tilde{\tilde{S}}(\xi)\,d\xi = 0,$$

mithin

$$(42)\quad -\frac{1}{\gamma^2 R^2}\int_0^{2\pi R} d\xi \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}(\xi, u)\,F_2(u)\,du = 0,$$

oder wegen (36) einfacher

$$(43)\quad \int_0^{2\pi R} F_2(u)\,du = 0.$$

Übrigens ergibt sich auch (43) einfach aus der zweiten Gleichung (27) durch Integration zwischen 0 und $2\pi R$, da $Z(u)$ und $S(u)$ nach Voraussetzung die Periode $2\pi R$ haben[11a]).

Ist die Bedingung (43) erfüllt, so findet man nach bekannten Sätzen über lineare Integralgleichungen für die Lösungen $Z(\xi)$, $S(\xi)$, wenn man mit c eine willkürliche Konstante bezeichnet, die Formeln von der Form

$$(44)\quad \begin{aligned} Z(\xi) &= \int_0^{2\pi R} H_1(\xi, u)\,\Phi^{(1)}(u)\,du + \int_0^{2\pi R} H_2(\xi, u)\,\Phi^{(2)}(u)\,du, \\ S(\xi) &= \int_0^{2\pi R} H_3(\xi, u)\,\Phi^{(1)}(u)\,du + \int_0^{2\pi R} H_4(\xi, u)\,\Phi^{(2)}(u)\,du + cR. \end{aligned}$$

In der Tat ist jetzt

$$(45)\quad Z(\xi) = \int_E H(\xi, u)\,\Phi(u)\,du + c\,W(\xi).$$

Die Formeln (44) drücken diese Beziehung lediglich in einer anderen Form aus.

Wie bekannt, ist

$$(46)\quad \int_E H(\xi, u)\,\tilde{\tilde{W}}(\xi)\,d\xi = 0.$$

Aus (45) und (46) folgt demnach

$$(47)\quad \int_E Z(\xi)\,\tilde{\tilde{W}}(\xi)\,d\xi = c\int_E W(\xi)\,\tilde{\tilde{W}}(\xi)\,d\xi,$$

[11a]) Wie in der Fußnote [10]) bemerkt wurde, ist $\mathfrak{G}(\xi, u)$ eine Funktion von $(\xi - u)$ allein. Demnach ist $\frac{\partial}{\partial \xi}\mathfrak{G}(\xi, u) = -\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}(\xi, u)$. Beachtet man dies, so sieht man unmittelbar, daß das System (33) sich selbst adjungiert ist, $K(\xi, u) = K(u, \xi)$, demnach $W(\xi) = \tilde{\tilde{W}}(\xi)$ gilt. (Anmerkung bei der Korrektur, den 25. Februar 1923.)

mithin

$$R\int_0^{2\pi R} S(\xi)\,d\xi = c\int_0^{2\pi R} R^2\,d\xi = 2\pi R^3 c, \tag{48}$$

$$c = \frac{1}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi R} S(\xi)\,d\xi. \tag{49}$$

Wir spezialisieren die Lösung durch die Festsetzung

$$\int_0^{2\pi R} S(\xi)\,d\xi = 0, \quad \text{d. h.} \quad c = 0. \tag{50}$$

Ist in dem Intervalle $(0,\ 2\pi R)$

$$|F_1(u)|,\ |F_2(u)| < h, \tag{51}$$

so folgt aus (44), (38*), (50) und (33) [12])

$$|Z(u)|,\ |S(u)|,\ \left|\frac{dZ(u)}{du}\right|,\ \left|\frac{dS(u)}{du}\right| < \alpha_1 h, \tag{52}$$

unter α_1 eine positive Konstante verstanden, wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Aus (31) ergeben sich die weiteren Ungleichheiten

$$\left|\frac{d^2Z(u)}{du^2}\right|,\ \left|\frac{d^2S(u)}{du^2}\right| < \alpha_2 h. \tag{53}$$

Ist insbesondere

$$F_1(u) = F_1(2\vartheta_0 - u), \quad F_2(u) = -F_2(2\vartheta_0 - u) \quad (\vartheta_0 \text{ konstant}), \tag{54}$$

so genügen die jetzt betrachteten Lösungen $\left(\int_0^{2\pi R} S(u)\,du = 0\right)$ den Beziehungen

$$Z(u) = Z(2\vartheta_0 - u), \quad S(u) = -S(2\vartheta_0 - u). \tag{55}$$

Sind nämlich $Z(u)$, $S(u)$ $\left(\int_0^{2\pi R} S(u)\,du = 0\right)$ Lösungen der Gleichungen (31), so ist, wie man leicht sieht, $Z(2\vartheta_0 - u)$, $-S(2\vartheta_0 - u)$ ein weiteres System von Lösungen der betrachteten speziellen Art. Da es aber nur ein System dieser Eigenschaft gibt, so gelten in der Tat die Formeln (55).

---

[12]) Man vergleiche die Fußnoten [11]) und [10]).

§ 3.

Bestimmung periodischer Lösungen der Integro-Differentialgleichungen (25) und (26) durch sukzessive Approximationen.

Handelt es sich jetzt um die Gleichungen (25) und (26), so ist

$$F_1(u) = R\gamma^2\left(\frac{dS}{du}\right)^2 - 2\gamma\omega Z\frac{dS}{du} + \gamma^2 Z\left(\frac{dS}{du}\right)^2 - M\varkappa\frac{1}{R}\left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \cdots\right.$$

(56)
$$\left. + \varkappa\int_C \mu\, du'\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right\} + \varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\mathsf{P}}\right.$$

$$F_2(u) = -\gamma^2 RZ\frac{d^2S}{du^2} - 2\gamma^2 R\frac{dS}{du}\frac{dZ}{du} + \varkappa\int_C \mu\, du'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]$$

(57)
$$+ \varkappa\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\mathsf{P}}.$$

Setzt man in (56) und (57) für Z und S irgendwelche Funktionen mit der Periode $2\pi R$ ein, die nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sind und überdies den Gleichungen

(58) $$Z(u) = Z(2\vartheta_0 - u), \qquad S(u) = -S(2\vartheta_0 - u)$$

genügen, so findet man ohne Schwierigkeit

(59) $$F_1(u) = F_1(2\vartheta_0 - u), \qquad F_2(u) = -F_2(2\vartheta_0 - u)$$

und darum auch

(60) $$\int_0^{2\pi R} F_2(u)\, du = 0.$$ [13])

Betrachten wir jetzt die in (56) und (57) vorkommenden Integrale

(61) $$J = \int_C \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right) du'$$

und

(62) $$L = \int_C \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right) du',$$

unter Z und S irgendwelche nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige reelle oder komplexe Funktionen von s mit der Periode $2\pi R$ verstanden [14]). Es mögen $\dot{Z}$ und $\dot{S}$ zwei weitere Funktionen der-

[13]) Die unter Zugrundelegung der Funktionen $Z(u)$, $S(u)$ konstruierte Kurve C_0 ist in bezug auf den Strahl $y = x\operatorname{tg}\vartheta_0$ symmetrisch.

[14]) Für reelle Z und S findet man unmittelbar (vgl. das vierte Kapitel) bsp.

(63) $$L = \int_C \frac{R + Z'}{\varrho^2}\sin\left(\frac{u' + S' - u - S}{R}\right) du',$$

$$\varrho^2 = (R+Z)^2 + (R+Z')^2 - 2(R+Z)(R+Z')\cos\left(\frac{u' + S' - u - S}{R}\right) du',$$

unter S' den zu u' gehörigen Wert von S verstanden.

(Fortsetzung der Fußnote 14 auf nächster Seite.)

selben Natur bezeichnen. Die Integrale J und L, wie die weiteren analogen Integrale

$$(65)\quad \dot{J} = \int_C \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\nu}} \log \frac{R}{\dot{\varrho}} - \frac{\partial}{\partial \nu_0} \log \frac{R}{\varrho_0} \right) du', \qquad \dot{L} = \int_C \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\tau}} \log \frac{R}{\dot{\varrho}} - \frac{\partial}{\partial \tau_0} \log \frac{R}{\varrho_0} \right) du',$$

haben eine bestimmte Bedeutung und stellen stetige Funktionen von u dar.

Sei

$$(66)\quad \bar{\Omega} = \mathrm{Max} \left\{ |Z|, |S|, |\dot{Z}|, |\dot{S}|, \left| \frac{d}{du} Z \right|, \ldots, \left| \frac{d^2}{du^2} \dot{S} \right| \right\} < \alpha^0$$

(α^0 konstant)

und

$$(67)\quad \Omega = \mathrm{Max} \left\{ |Z - \dot{Z}|, |S - \dot{S}|, \left| \frac{d}{du}(Z - \dot{Z}) \right|, \ldots, \left| \frac{d^2}{du^2}(S - \dot{S}) \right| \right\}.$$

Wie in dem vierten Kapitel bewiesen wird, ist

$$(68)\quad |J - \dot{J}|, \ |L - \dot{L}| < \alpha_3 \Omega.$$

Setzt man insbesondere $\dot{Z} = \dot{S} = 0$, so findet man augenscheinlich

$$(69)\quad |J|, \ |L| < \alpha_3 \bar{\Omega}.$$

Wir versuchen jetzt periodische Lösungen der Gleichungen (25) und (26) wie folgt durch sukzessive Approximationen zu gewinnen.

Wir setzen

$$(70)\quad Z_0 = 0, \qquad S_0 = 0$$

und bestimmen nacheinander die periodischen Lösungen der Gleichungen

$$(71)\quad \begin{cases} L_1(Z_1, S_1) = \Lambda_1(Z_0, S_0), \\ L_2(Z_1, S_1) = \Lambda_2(Z_0, S_0), \end{cases} \quad \int_0^{2\pi R} S_1(u)\, du = 0,$$

$$\begin{cases} L_1(Z_2, S_2) = \Lambda_1(Z_1, S_1), \\ L_2(Z_2, S_2) = \Lambda_2(Z_1, S_1), \end{cases} \quad \int_0^{2\pi R} S_2(u)\, du = 0,$$

$$\begin{cases} L_1(Z_3, S_3) = \Lambda_1(Z_2, S_2), \\ L_2(Z_3, S_3) = \Lambda_2(Z_2, S_2), \end{cases} \quad \int_0^{2\pi R} S_3(u)\, du = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das Integral (63) ist als der Cauchysche Hauptwert aufzufassen.

Durch die gleiche Formel wird L für komplexe Z und S *definiert*. Das Argument u bleibt nach wie vor reell. Sind S und Z Funktionen eines oder mehrerer komplexer Parameter p_k, die sich für alle u in dem Gebiete

$$(64)\quad |p_k| < \alpha^{(1)}$$

analytisch und regulär verhalten, so ist auch L eine in (64) analytische und reguläre Funktion von p_k. Das gleiche gilt für J.

Nach den vorhergehenden Ausführungen steht der Bestimmung der Funktionen $Z_1, S_1; Z_2, S_2, \ldots$ nichts im Wege. In der Tat ist zunächst $\int_C \Lambda_2(Z_0, S_0)\,du = 0$, so daß Z_1 und S_1 existieren und gewiß stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Beachtet man den vorhin genannten Hilfssatz, so findet man sogleich, daß die Funktionen auf der rechten Seite des zweiten Systems der Gleichungen (71) stetig sind. Da überdies $\int_C \Lambda_2(Z_1, S_1)\,du = 0$ ist, so sind Z_2, S_2 vorhanden und haben stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. So geht man sukzessive weiter.

Alle sukzessiven Näherungen $Z_1, S_1; Z_2, S_2; \ldots$ sind übrigens, als Funktionen des Parameters μ betrachtet, in ihrem Definitionsgebiete analytisch und regulär.

Sei jetzt zur Vereinfachung

$$Z_n - Z_{n-1} = \zeta_n, \qquad S_n - S_{n-1} = \sigma_n, \qquad (n \geqq 1) \tag{72}$$

$$\operatorname{Max}\left\{|\zeta_n|, |\sigma_n|, \left|\frac{d\zeta_n}{du}\right|, \ldots, \left|\frac{d^2\sigma_n}{du^2}\right|\right\} = \mathfrak{v}_n, \tag{73}$$

$$\operatorname{Max}\left\{|Z_k|, |S_k|, \left|\frac{dZ_k}{du}\right|, \ldots, \left|\frac{d^2 S_k}{du^2}\right|\right\} = \mathfrak{w}_n \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{74}$$

gesetzt. Aus (71) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} L_1(\zeta_n, \sigma_n) &= \Lambda_1(Z_{n-1}, S_{n-1}) - \Lambda_1(Z_{n-2}, S_{n-2}), \\ L_2(\zeta_n, \sigma_n) &= \Lambda_2(Z_{n-1}, S_{n-1}) - \Lambda_2(Z_{n-2}, S_{n-2}) \end{aligned} \qquad (n \geqq 2). \tag{75}$$

Aus (25) und (26) folgt jetzt, wenn man $|\mathfrak{w}_n| < \alpha^0$ annimmt, wegen (72), (73), (74), (66), (67) und (68), wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(Z_{n-1}, S_{n-1}) - \Lambda_1(Z_{n-2}, S_{n-2})| &< \alpha_4\left(\mathfrak{w}_{n-1} + \mathfrak{w}_{n-1}^2 + \mu + \frac{R}{\mathfrak{R}}\right)\mathfrak{v}_{n-1}, \\ |\Lambda_2(Z_{n-1}, S_{n-1}) - \Lambda_2(Z_{n-2}, S_{n-2})| &< \alpha_4\left(\mathfrak{w}_{n-1} + \mu + \frac{R}{\mathfrak{R}}\right)\mathfrak{v}_{n-1}.{}^{15}) \end{aligned} \tag{76}$$

Aus (25), (26), (51), (52) und (53) folgt zunächst

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_1 < \alpha_5 \frac{R}{\mathfrak{R}}. \tag{77}$$

Aus (25), (26), (76), (66), (67) und (68) ergibt sich weiter

$$\mathfrak{v}_n < \alpha_5\left(\mathfrak{w}_{n-1} + \mathfrak{w}_{n-1}^2 + \mu + \frac{R}{\mathfrak{R}}\right)\mathfrak{v}_{n-1} \qquad (n > 1); \tag{78}$$

---

[15]) Es läßt sich ohne Schwierigkeiten beispielsweise zeigen, daß in naheliegender Schreibweise

$$\left|\frac{\partial}{\partial \nu_{n-1}} \log \frac{R}{\mathsf{P}_{n-1}} - \frac{\partial}{\partial \nu_{n-2}} \log \frac{R}{\mathsf{P}_{n-2}}\right| < \alpha_4 \frac{R}{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{v}_{n-1} \tag{76*}$$

gilt.

oder, zur Vereinfachung

$$|\mu| + \frac{R}{\Re} = \hat{\beta} \quad (79)$$

[16])

gesetzt, gewiß

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{w}_1 < \alpha_5 \hat{\beta}, \quad (80)$$

$$\mathfrak{v}_n < \alpha_5 (\mathfrak{w}_{n-1} + \mathfrak{w}_{n-1}^2 + \hat{\beta}) \mathfrak{v}_{n-1} \qquad (n > 1).$$

Ist etwa

$$\mathfrak{w}_l < \beta_0 < \alpha^0, \qquad (l \geqq 1) \quad (81)$$

so folgt aus (25), (26), (67), (68), (69), (71) und (79) gewiß

$$|A_1(Z_l, S_l)|, |A_2(Z_l, S_l)| < \alpha_6 (\beta_0^2 + \beta_0^3 + \hat{\beta}\beta_0 + \hat{\beta}), \quad (82)$$

demnach wegen (51), (52), (53)

$$\mathfrak{w}_{l+1} < \alpha_7 (\beta_0^2 + \beta_0^3 + \hat{\beta}\beta_0 + \hat{\beta}). \quad (83)$$

Gelingt es zu erreichen, daß

$$\alpha_7 (\beta_0^2 + \beta_0^3 + \hat{\beta}\beta_0 + \hat{\beta}) < \beta_0 \quad (84)$$

gilt, so wird sich auch

$$\mathfrak{w}_{l+1} < \beta_0 \quad (85)$$

ergeben.

Wir setzen jetzt

$$\hat{\beta} = \frac{\beta_0}{\alpha_5 + \alpha_7} < \frac{\alpha^0}{\alpha_5 + \alpha_7} \quad (86)$$

fest. Der Ungleichheit (84) kann man bei hinreichend kleinem $\hat{\beta}$ gewiß Genüge leisten. In der Tat, finden wir aus (84)

$$\hat{\beta} + \beta_0 + \beta_0^2 < \frac{\beta_0 - \alpha_7 \hat{\beta}}{\alpha_7 \beta_0} = \frac{\alpha_5}{(\alpha_5 + \alpha_7)\alpha_7}, \quad (87)$$

mithin wegen (86)

$$\hat{\beta} < \frac{\alpha_5}{(\alpha_5 + \alpha_7)\alpha_7} \cdot \frac{1}{1 + (\alpha_5 + \alpha_7) + (\alpha_5 + \alpha_7)^2 \hat{\beta}}. \quad (88)$$

Diese Ungleichheit ist gewiß erfüllt, wenn man β_0 so klein wählt, daß

$$\hat{\beta} < 1, \quad \hat{\beta} < \frac{\alpha_5}{(\alpha_5 + \alpha_7)\alpha_7} \cdot \frac{1}{1 + (\alpha_5 + \alpha_7) + (\alpha_5 + \alpha_7)^2} \quad (89)$$

wird.

Da nun wegen (80) und (86)

$$\mathfrak{w}_1 < \alpha_5 \hat{\beta} < \beta_0 \quad (90)$$

[16]) Es sei daran erinnert, daß der Parameter μ auch komplexe Werte annehmen kann.

ist, so ist *für alle* l

$$\mathfrak{w}_l < \beta_0 < \alpha^0. \tag{91}$$

Aus (78) und (91) folgt jetzt, wenn man $\beta_0 < 1$ voraussetzt,

$$\mathfrak{v}_n < \alpha_5 (2\mathfrak{w}_{n-1} + \hat{\beta})\mathfrak{v}_{n-1} < \alpha_5 (1 + 2(\alpha_5 + \alpha_7))\hat{\beta}\mathfrak{v}_{n-1}. \tag{92}$$

Ist schließlich, wie wir annehmen wollen,

$$\hat{\beta} < \frac{q}{\alpha_5(1 + 2(\alpha_5 + \alpha_7))} \qquad (q < 1), \tag{93}$$

so ist die Reihe $\Sigma \mathfrak{v}_n$ unbedingt und gleichmäßig konvergent. Sei jetzt

$$Z = Z_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(Z_k - Z_{k-1}), \qquad S = S_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(S_k - S_{k-1}). \tag{94}$$

Die Funktionen Z und S sind offenbar nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, periodisch mit der Periode $2\pi R$ und erfüllen, wie sich ohne ernstliche Schwierigkeiten durch Grenzübergang zeigen läßt, die Integro-Differentialgleichungen (25) und (26). Es ist

$$\int_0^{2\pi R} S(u)\,du = 0. \tag{95}$$

Wie wir vorhin gesehen haben, sind die sukzessiven Approximationen Funktionen von μ, die sich in einem Gebiete

$$|\mu| < \alpha^{(2)} \tag{96}$$

analytisch und regulär verhalten[16a]). Das gleiche gilt, da die Reihen (94) gleichmäßig konvergieren, auch für die Lösungen S und Z. Diese lassen sich demnach in Potenzreihen von der Form

$$Z = \mathfrak{P}_1(\mu), \qquad S = \mathfrak{P}_2(\mu) \tag{97}$$

entwickeln.

Man kann schließlich durch Betrachtungen, die den soeben durchgeführten analog sind, beweisen, daß die gewonnenen Lösungen die einzigen der Beziehung (95) genügenden Lösungen sind[17]).

Wir haben uns bis jetzt auf die Bestimmung der Lösungen beschränkt, die durch die Beziehung (95) spezialisiert sind. Es ist jetzt leicht, zu allgemeinen Lösungen überzugehen. Man überzeugt sich leicht, daß die Funktionen

$$\hat{Z}(u) = Z(u + \varepsilon), \qquad \hat{S}(u) = S(u + \varepsilon) + \varepsilon \tag{98}$$

[16a]) Nimmt man beispielsweise $\frac{R}{\mathfrak{R}} = \frac{\hat{\beta}}{2}$ an, so kann man etwa $\alpha^{(2)} = q_1\hat{\beta}$ $\left(q_1 < \frac{1}{2}\right)$ setzen.

[17]) Ist $\tilde{Z}(u)$, $\tilde{S}(u)$ ein anderes System von Lösungen dieser Art, so werden die Differenzen $\tilde{Z} - Z_n$, $\tilde{S} - S_n$ betrachtet und es wird gezeigt, daß sie für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren.

für beliebiges ε den Gleichungen (25) und (26) genügen. Der Übergang von S und Z zu $\hat{S}$ und $\hat{Z}$ läßt die Konfiguration des Systems ungeändert und bedeutet geometrisch nur so viel, daß man als die ungestörte Lage des Teilchens $s+\varepsilon+S(s+\varepsilon)$, $R+Z(s+\varepsilon)$, das zur Zeit $t=0$ betrachtet wird, nicht den Punkt R, $s+\varepsilon$ des Kreises C, sondern den Punkt R, s betrachtet. — Jetzt finden wir aber

$$\int_0^{2\pi R} \hat{S}(u)\,du = \int_0^{2\pi R} S(u+\varepsilon)\,du + \varepsilon \int_0^{2\pi R} du = 2\pi R\varepsilon. \tag{99}$$

Das von uns betrachtete mechanische Problem hat also nur eine Lösung.

Zweites Kapitel.

Freie Schwingungen eines Ringes von geringer Dichte.

§ 1.

Grundgleichungen.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der möglichen Schwingungszustände des Systems bei Abwesenheit eines störenden Körpers über. Die Bewegungsgleichungen lauten jetzt einfacher

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \nu\zeta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2 + 2\zeta\omega\frac{1}{R}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \zeta\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2$$
$$- M\varkappa\frac{1}{R}\left(\frac{\zeta^2}{R^2} - \frac{\zeta^3}{R^3} + \ldots\right) + \varkappa\int_C \mu\,ds'\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right],$$

$$R\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + 2R\omega\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\zeta\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - 2\frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \varkappa R\int_C \mu\,ds'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right],$$

$$\nu = \omega^2 + M\varkappa\frac{1}{R^2} = 2\omega^2 - \frac{\varkappa\pi\mu}{R}.$$

Wie in dem vorhergehenden Kapitel suchen wir Lösungen dieser Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta(s,t) = Z(s-R\delta t) = Z(u),\\ \sigma &= \sigma(s,t) = S(s-R\delta t) = S(u)\end{aligned} \tag{2}$$

zu bestimmen, unter $Z(u)$ und $S(u)$ periodische Funktionen mit der Periode $2\pi R$ verstanden. Die Gleichungen (1) gehen jetzt über in

$$R^2\delta^2\frac{d^2Z}{du^2}+2R\delta\omega\frac{dS}{du}-\nu Z=R\delta^2\left(\frac{dS}{du}\right)^2-2\delta\omega Z\frac{dS}{du}+\delta^2 Z\left(\frac{dS}{du}\right)^2$$
$$-M\varkappa\frac{1}{R}\left(\frac{Z^2}{R^2}-\frac{Z^3}{R^3}+\ldots\right)+\varkappa\int_C\mu\,du'\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right],$$

(3)

$$R^2\delta^2\frac{d^2S}{du^2}-2R\delta\omega\frac{dZ}{du}=-R\delta^2 Z\frac{d^2S}{du^2}-2R\delta^2\frac{dS}{du}\frac{dZ}{du}$$
$$+\varkappa\int_C\mu du'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right].$$

Sieht man für einen Augenblick von den Gliedern höherer Ordnung ab, so findet man zur Bestimmung von Z und S die beiden homogenen Differentialgleichungen

(4)
$$R^2\delta^2\frac{d^2Z}{du^2}+2R\delta\omega\frac{dS}{du}-\nu Z=0,$$
$$R^2\delta^2\frac{d^2S}{du^2}-2R\delta\omega\frac{dZ}{du}=0.$$

Diese Gleichungen haben periodische Lösungen mit der Periode $2\pi R$, die von den trivialen Lösungen $Z=0$, $S=R$ verschieden sind, nur wenn δ^2 den Wert

(5)
$$\delta_0^2=4\omega^2-\nu=2\omega^2+\frac{\varkappa}{R}\pi\mu=\frac{\varkappa}{R^2}(2M+3\pi\mu R)$$

hat. Für δ_0 ergeben sich dabei die beiden Werte

$$\pm\left[\frac{\varkappa}{R^2}(2M+3\pi\mu R)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Die neuen Eigenfunktionen sind nach (29) I gleich

(6)
$$R\cos\frac{u}{R},\quad\frac{2R\omega}{\delta_0}\sin\frac{u}{R};\quad R\sin\frac{u}{R},\quad-\frac{2R\omega}{\delta_0}\cos\frac{u}{R}.$$

Es liegt darum nahe, zu untersuchen, ob *die vollständigen Gleichungen* (3) *nicht für kleine* $|\eta|$ *und* $\delta=\delta_0+\eta$ *periodische Lösungen besitzen, die sich in der Form*

(7)
$$Z(u)=d\cos\frac{u}{R}+d\,\mathfrak{P}^{(1)}(d,\mu;u),$$
$$S(u)=\frac{2\omega}{\delta_0}d\sin\frac{u}{R}+d\,\mathfrak{P}^{(2)}(d,\mu;u)$$

bzw.

(7*)
$$Z(u)=d\sin\frac{u}{R}+d\,\mathfrak{P}^{(3)}(d,\mu,u),$$
$$S(u)=-\frac{2\omega}{\delta_0}d\cos\frac{u}{R}+d\,\mathfrak{P}^{(4)}(d,\mu;u)$$

darstellen lassen. In (7) und (7*) bezeichnet d einen Parameter; $\mathfrak{P}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}^{(4)}$ sind Potenzreihen, die für alle hinreichend kleinen Werte von $|d|$ und $|\mu|$ und alle u in dem Intervalle $0, 2\pi R$ gleichmäßig konvergieren. *Gleichzeitig soll*

$$\eta = \mathfrak{P}^{(5)}(d; \mu)$$

sein.

Wir setzen in (3) für δ den Ausdruck $\delta_0 + \eta$ ein und erhalten nach einer Umordnung

$$\begin{aligned} L^{(1)}(Z,S) &= R^2\delta_0^2\frac{d^2Z}{du^2} + 2R\delta_0\omega\frac{dS}{du} - \nu Z \\ &= -\eta\left(2\delta_0 R^2\frac{d^2Z}{du^2} + 2R\omega\frac{dS}{du}\right) - R^2\eta^2\frac{d^2Z}{du^2} + R\delta^2\left(\frac{dS}{du}\right)^2 \\ &\quad - 2\delta\omega Z\frac{dS}{du} + \delta^2 Z\left(\frac{dS}{du}\right)^2 - M\varkappa\frac{1}{R}\left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \ldots\right) \\ &\quad + \varkappa\int_C \mu\, du'\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right] = A^{(1)}(Z,S), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} L^{(2)}(Z,S) &= R^2\delta_0^2\frac{d^2S}{du^2} - 2R\delta_0\omega\frac{dZ}{du} = -\eta\left(2\delta_0 R^2\frac{d^2S}{du^2} - 2R\omega\frac{dZ}{du}\right) \\ &\quad - R^2\eta^2\frac{d^2S}{du^2} - R\delta^2 Z\frac{d^2S}{du^2} - 2R\delta^2\frac{dS}{du}\frac{dZ}{du} + \varkappa\int_C \mu\, du'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right] \\ &= A^{(2)}(Z,S) \qquad (\delta = \delta_0 + \eta). \end{aligned} \tag{9}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist η nur in den beiden ersten Gliedern auf der rechten Seite der Gleichungen (8) und (9) mit Größen erster Ordnung in bezug auf Z und S multipliziert.

Sind $Z(u)$, $S(u)$ Lösungen dieser Differentialgleichungen, so sind es auch die Funktionen

$$\hat{Z}(u) = Z(u+\varepsilon), \quad \hat{S}(u) = S(u+\varepsilon) + \varepsilon. \tag{10}$$

Dies bedeutet, wie bereits am Schluß des ersten Kapitels auseinandergesetzt worden ist, daß man als die ungestörte Lage des Teilchens $s + \varepsilon + S(s+\varepsilon)$, $Z(s+\varepsilon)$, das zur Zeit $t = 0$ betrachtet wird, nicht den Punkt $R, s+\varepsilon$, sondern den Punkt R, s ansieht. Die Konfiguration des Systems bleibt dabei ungeändert. Jetzt kann man darüber hinaus auch noch den Ring als Ganzes um einen beliebigen Winkel u_0 drehen, wodurch man zu den Funktionen

$$\begin{aligned} \dot{Z}(u) &= \hat{Z}(u-u_0) = Z(u-u_0+\varepsilon), \\ \dot{S}(u) &= \hat{S}(u-u_0) = S(u-u_0+\varepsilon) + \varepsilon \end{aligned} \tag{11}$$

gelangt. Man kann nun u_0 und ε so wählen, daß

$$\int_0^{2\pi R}\left[\sin\frac{u}{R}\dot{Z}(u) - \frac{2\omega}{\delta_0}\cos\frac{u}{R}\dot{S}(u)\right]du = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi R}\dot{S}(u)\,du = 0 \tag{12}$$

gilt. In der Tat ist, wie man leicht verifiziert,

$$\int_0^{2\pi R}\left[\sin\frac{u}{R}Z(u)-\frac{2\omega}{\delta_0}\cos\frac{u}{R}S(u)\right]du$$

$$=\int_0^{2\pi R}\left[\sin\frac{u+u_0-\varepsilon}{R}Z(u)-\frac{2\omega}{\delta_0}\cos\frac{u+u_0-\varepsilon}{R}S(u)\right]du$$

(13)

$$=\cos\frac{u_0-\varepsilon}{R}\int_0^{2\pi R}\left[\sin\frac{u}{R}Z(u)-\frac{2\omega}{\delta_0}\cos\frac{u}{R}S(u)\right]du$$

$$+\sin\frac{u_0-\varepsilon}{R}\int_0^{2\pi R}\left[\cos\frac{u}{R}Z(u)+\frac{2\omega}{\delta_0}\sin\frac{u}{R}S(u)\right]du=0.$$

Ist der Faktor von $\cos\frac{u_0-\varepsilon}{R}$ gleich Null, so setzen wir $u_0-\varepsilon=0$, im anderen Falle gibt die Gleichung (13) den erforderlichen Wert von $\operatorname{cotg}\frac{u_0-\varepsilon}{R}$ an. Daß die Beziehung $\int_0^{2\pi R}S(u)du=0$ hernach erfüllt werden kann, ist selbstverständlich. Wir können uns demnach in dem folgenden auf die Bestimmung periodischer Lösungen der Gleichungen (8) und (9) beschränken, die den Beziehungen (12) genügen.

§ 2.

Auflösung der Integro-Differentialgleichungen (8) und (9).

Sei $\mathfrak{G}_0(\xi,u)$ die periodische Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{d^2Z}{du^2}-\frac{\nu}{\delta_0^2R^2}Z=0,$$

(14)

$$\mathfrak{G}_0(\xi,2\pi R)=\mathfrak{G}_0(\xi,0),\qquad\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,2\pi R)=\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,0).$$

Es ist leicht einzusehen, daß

(15)

$$\mathfrak{G}_0(-\xi,-u)=\mathfrak{G}_0(\xi,u)$$

gilt[18]). Wie wir in dem ersten Kapitel von den Gleichungen (25) und (26)

[18]) In der Tat, genügt $\mathfrak{G}_0(-\xi,-u)=\Gamma(u)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Gamma}{du^2}-\frac{\nu}{\delta_0^2R^2}\Gamma=0$$

und der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial u}\Gamma(\xi+0)-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma(\xi-0)=\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(-\xi,-\xi+0)-\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(-\xi,-\xi-0)=-1.$$

Demnach ist $\Gamma(u)=\mathfrak{G}_0(\xi,u)$. Übrigens ist $\mathfrak{G}$ eine Funktion von $\xi-u$ allein (vgl. die Fußnote [10])).

zu den Integro-Differentialgleichungen des § 3 kamen, so kommen wir jetzt von den Gleichungen (8) und (9) zu den Integro-Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
Z(\xi) &= -\frac{2\omega}{\delta_0 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,S(u)\,du \\
&\quad -\frac{1}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,A^{(1)}(Z(u),S(u))\,du, \\
S(\xi) &= \frac{2\omega}{\delta_0 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,Z(u)\,du+\frac{\nu}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,S(u)\,du \\
&\quad -\frac{1}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,A^{(2)}(Z(u),S(u))\,du,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

die wir wie in Kapitel I zu der einen Gleichung

$$
\mathfrak{Z}(\xi)=\int_E K_0(\xi,u)\,\mathfrak{Z}(u)\,du+\Psi_0(\xi) \tag{17}
$$

zusammenfassen können.

Der zu (17) adjungierten homogenen Integralgleichung entsprechen wie in § 2 I die beiden Integralgleichungen

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}(\xi) &= 2\frac{\omega}{\delta_0 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,\tilde{S}(u)\,du, \\
\tilde{S}(\xi) &= -2\frac{\omega}{\delta_0 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,\tilde{Z}(u)\,du+\frac{\nu}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,\tilde{S}(u)\,du.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Die zu (16) gehörigen homogenen Integralgleichungen

$$
\begin{aligned}
Z(\xi) &= -\frac{2\omega}{\delta_0 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,S(u)\,du, \\
S(\xi) &= \frac{2\omega}{\delta_0 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,Z(u)\,du+\frac{\nu}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,S(u)\,du,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

oder kürzer

$$
\mathfrak{Z}(\xi)=\int_E K_0(\xi,u)\,\mathfrak{Z}(u)\,du \tag{20}
$$

haben drei Systeme linear unabhängiger Nullösungen:

$$
0,\ R;\quad R\cos\frac{u}{R},\ R\frac{2\omega}{\delta_0}\sin\frac{u}{R};\quad R\sin\frac{u}{R},\ -R\frac{2\omega}{\delta_0}\cos\frac{u}{R}. \tag{21}
$$

Es ist darum wie in § 2 I zunächst

$$(22)\qquad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,du = 0, \qquad \frac{\nu}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,du = 1.$$

Setzt man in die Integralgleichungen (19) für Z und S entsprechend $\cos\frac{u}{R}$ und $\frac{2\omega}{\delta_0}\sin\frac{u}{R}$ ein, so findet man weiter

$$(23)\qquad \begin{aligned} \cos\frac{\xi}{R} &= -\frac{4\omega^2}{\delta_0^2 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\sin\frac{u}{R}\,du,\\ \frac{2\omega}{\delta_0}\sin\frac{\xi}{R} &= 2\frac{\omega}{\delta_0 R}\int_0^{2\pi R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\cos\frac{u}{R}\,du + \frac{2\omega\nu}{\delta_0^3 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\sin\frac{u}{R}\,du \end{aligned}$$

oder nach einer teilweisen Integration

$$(24)\qquad \cos\frac{\xi}{R} = 4\frac{\omega^2}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\cos\frac{u}{R}\,du$$

und

$$(25)\qquad \sin\frac{\xi}{R} = \frac{1}{R^2}\left(1+\frac{\nu}{\delta_0^2}\right)\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\sin\frac{u}{R}\,du = \frac{4\omega^2}{\delta_0^2 R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\sin\frac{u}{R}\,du.$$

Das dritte System der Nullösungen ergibt, wie man leicht feststellt, dieselben Integralgleichungen

Die homogenen Integralgleichungen (18) haben die drei Systeme von Lösungen:

$$(26)\qquad 0, R; \qquad R\cos\frac{u}{R}, \quad \frac{2\omega R}{\delta_0}\sin\frac{u}{R}; \qquad R\sin\frac{u}{R}, \quad -\frac{2\omega R}{\delta_0}\cos\frac{u}{R}.$$

Man überzeugt sich hiervon ohne Schwierigkeiten durch Einsetzen in (18), wenn man die Formeln (22), (24) und (25) sowie die Gleichungen, die man aus diesen durch Differentiation in bezug auf ξ erhält, berücksichtigt. Die Systeme (21) und (26) sind identisch[18a]). Sie gehen, wenn man sie in der üblichen Weise normiert[19]), entsprechend in die Funktionen der folgenden Tabelle über:

[18a]) Wie in der Fußnote [18]) bemerkt wurde, ist $\mathfrak{G}_0(\xi,u)$ eine Funktion von $(\xi-u)$ allein. Demnach ist $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{G}_0(\xi,u) = -\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)$. Beachtet man dies, so sieht man unmittelbar, daß das System (19) sich selbst adjungiert ist, $K_0(\xi,u) = K_0(u,\xi)$, demnach die Systeme (21) und (26) identisch sein müssen. (Anmerkung bei der Korrektur, den 25. Februar 1923.)

[19]) Es sei daran erinnert, daß das Integrationsgebiet E das doppelt durchlaufene Intervall $0, 2\pi R$ ist.

$$(27)\qquad \overbrace{0,\ \bar{A}R}^{w_1}\ \Big|\ \overbrace{\bar{B}R\cos\frac{u}{R},\ \frac{2\omega}{\delta_0}\bar{B}R\sin\frac{u}{R}}^{w_2}\ \Big|\ \overbrace{\bar{B}R\sin\frac{u}{R},\ -\frac{2\omega}{\delta_0}\bar{B}R\cos\frac{u}{R}}^{w_3}$$

$$(28)\qquad \bar{A}^2=\frac{1}{2\pi R^3},\qquad \bar{B}^2=\frac{1}{\pi R^3}\,\frac{\delta_0^2}{4\omega^2+\delta_0^2}.$$

Die erste, dritte und fünfte Kolonne entsprechen hier dem ersten, die übrigen Kolonnen dem zweiten Umlauf über das Intervall $0, 2\pi R$. Nach bekannten Sätzen hat der Kern

$$(29)\qquad K_0(\xi,u)-w_1(\xi)\,w_1(u)-w_2(\xi)\,w_2(u)-w_3(\xi)\,w_3(u)=N(\xi,u)$$

keine Nullösungen mehr. In der folgenden Tabelle sind die den beiden Umläufen von ξ und u entsprechenden Werte von $N(\xi,u)$ zusammengestellt.

	Der erste Umlauf von u	Der zweite Umlauf von u
Der erste Umlauf von ξ	$-\bar{B}^2R^2\cos\frac{\xi-u}{R}$	$-\frac{2\omega}{\delta_0 R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)$ $+\frac{2\omega}{\delta_0}\bar{B}^2R^2\sin\frac{\xi-u}{R}$
Der zweite Umlauf von ξ	$\frac{2\omega}{\delta_0 R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)-\frac{2\omega}{\delta_0}\bar{B}^2R^2\sin\frac{\xi-u}{R}$	$\frac{\nu}{\delta_0^2R^2}\mathfrak{G}_0(\xi,u)-\bar{A}^2R^2$ $-\frac{4\omega^2}{\delta_0^2}\bar{B}^2R^2\cos\frac{\xi-u}{R}$

Drückt man jetzt $K_0(\xi,u)$ durch $N(\xi,u)$ aus und geht man zu den simultanen Integralgleichungen (16) zurück[19]), so findet man nach einer Ordnung der Glieder die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&Z(\xi)+\bar{B}^2R^2\int_0^{2\pi R}\cos\frac{\xi-u}{R}Z(u)\,du\\
&\qquad+\int_0^{2\pi R}\Big[\frac{2\omega}{\delta_0 R}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi,u)-\bar{B}^2R^2\frac{2\omega}{\delta_0}\sin\frac{\xi-u}{R}\Big]S(u)\,du\\
(30)\qquad&=\bar{B}^2R^2\cos\frac{\xi}{R}\int_0^{2\pi R}\Big[\cos\frac{u}{R}Z(u)+\frac{2\omega}{\delta_0}\sin\frac{u}{R}S(u)\Big]du\\
&\qquad+\bar{B}^2R^2\sin\frac{\xi}{R}\int_0^{2\pi R}\Big[\sin\frac{u}{R}Z(u)-\frac{2\omega}{\delta_0}\cos\frac{u}{R}S(u)\Big]du\\
&\qquad-\frac{1}{\delta_0^2R^2}\int_0^{2\pi R}\mathfrak{G}_0(\xi,u)\,\Lambda^{(1)}(Z(u),S(u))\,du,
\end{aligned}$$

$$S(\xi) - \int_0^{2\pi R} \left[\frac{2\omega}{\delta_0 R} \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}_0(\xi, u) - \frac{2\omega}{\delta_0} \bar{B}^2 R^2 \sin \frac{\xi - u}{R} \right] Z(u)\, du$$

$$- \int_0^{2\pi R} \left[\frac{\nu}{\delta_0^2 R^2} \mathfrak{G}_0(\xi, u) - \bar{A}^2 R^2 - \frac{4\omega^2}{\delta_0^2} \bar{B}^2 R^2 \cos \frac{\xi - u}{R} \right] S(u)\, du$$

$$(31) \quad = \bar{A}^2 R^2 \int_0^{2\pi R} S(u)\, du - \frac{2\omega}{\delta_0} \bar{B}^2 R^2 \cos \frac{\xi}{R} \int_0^{2\pi R} \left[\sin \frac{u}{R} Z(u) - \frac{2\omega}{\delta_0} \cos \frac{u}{R} S(u) \right] du$$

$$+ \frac{2\omega}{\delta_0} \bar{B}^2 R^2 \sin \frac{\xi}{R} \int_0^{2\pi R} \left[\cos \frac{u}{R} Z(u) + \frac{2\omega}{\delta_0} \sin \frac{u}{R} S(u) \right] du$$

$$- \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u)\, \Lambda^{(2)}(Z(u), S(u))\, du.$$

Beachten wir, daß den Ausführungen in § 1 gemäß

$$(32) \qquad \int_0^{2\pi R} S(u)\, du = 0,$$

$$(33) \qquad \int_0^{2\pi R} \left[\sin \frac{u}{R} Z(u) - \frac{2\omega}{\delta_0} \cos \frac{u}{R} S(u) \right] du = 0$$

vorausgesetzt werden kann, so finden wir, wenn wir zur Abkürzung

$$(34) \qquad \int_0^{2\pi R} \left[\cos \frac{u}{R} Z(u) + \frac{2\omega}{\delta_0} \sin \frac{u}{R} S(u) \right] du = d$$

schreiben,

$$Z(\xi) - \bar{B}^2 R^2 \int_0^{2\pi R} \cos \frac{\xi - u}{R} Z(u)\, du$$

$$(35) \qquad + \int_0^{2\pi R} \left[\frac{2\omega}{\delta_0 R} \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}_0(\xi, u) - \bar{B}^2 R^2 \frac{2\omega}{\delta_0} \sin \frac{\xi - u}{R} \right] S(u)\, du$$

$$= d \bar{B}^2 R^2 \cos \frac{\xi}{R} - \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u)\, \Lambda^{(1)}(Z(u), S(u))\, du,$$

$$S(\xi) - \int_0^{2\pi R} \left[\frac{2\omega}{\delta_0 R} \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{G}_0(\xi, u) - \frac{2\omega}{\delta_0} \bar{B}^2 R^2 \sin \frac{\xi - u}{R} \right] Z(u)\, du$$

$$(36) \qquad - \int_0^{2\pi R} \left[\frac{\nu}{\delta_0^2 R^2} \mathfrak{G}_0(\xi, u) - \bar{A}^2 R^2 - \frac{4\omega^2}{\delta_0^2} \bar{B}^2 R^2 \cos \frac{\xi - u}{R} \right] S(u)\, du$$

$$= \frac{2\omega}{\delta_0} \bar{B}^2 R^2 d \sin \frac{\xi}{R} - \frac{1}{\delta_0^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u)\, \Lambda^{(2)}(Z(u), S(u))\, du.$$

Den Ergebnissen des ersten Kapitels gemäß haben diese Integro-Differentialgleichungen für hinreichend kleine Werte von $|\eta|$, $|\mu|$ und $|d|$ gewiß ein und nur ein System von Lösungen. Diese Lösungen lassen sich nach Potenzen von η, μ und d entwickeln[20]).

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß

$$Z(-\xi) = Z(\xi), \qquad S(-\xi) = -S(\xi) \tag{37}$$

gilt. Sei in der Tat

$$\tilde{Z}(\xi) = Z(-\xi), \qquad \tilde{S}(\xi) = -S(-\xi). \tag{38}$$

Setzt man der Übersichtlichkeit halber für $\Lambda^{(1)}(Z, S)$ vorübergehend $\Lambda^{(1)}(Z, S; u)$ ein, so findet man vor allem ohne Schwierigkeiten

$$\Lambda^{(1)}(\tilde{Z}, \tilde{S}; -u) = \Lambda^{(1)}(Z, S; u)$$

und analog

$$\Lambda^{(2)}(\tilde{Z}, \tilde{S}; -u) = -\Lambda^{(2)}(Z, S; u).$$

Sodann ist wegen (15) beispielsweise

$$\int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(-\xi, u)\Lambda^{(1)}(\tilde{Z}, \tilde{S}; u)\,du = -\int_0^{-2\pi R} \mathfrak{G}_0(-\xi, -u)\Lambda^{(1)}(\tilde{Z}, \tilde{S}; -u)\,du$$
$$= \int_{-2\pi R}^{0} \mathfrak{G}_0(\xi, u)\Lambda^{(1)}(Z, S; u)\,du = \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u)\Lambda^{(1)}(Z, S; u)\,du.$$

Ferner findet man beispielsweise, wenn man die Formel (15) beachtet, mit $v = -u$

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi, u)\,\tilde{S}(u)\,du = -\int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{G}_0(\xi, u)\,S(-u)\,du = \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u)\,\frac{dS(-u)}{du}\,du$$

$$\int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, -v)\,\frac{dS(v)}{dv}\,dv = -\int_{-2\pi R}^{0} \mathfrak{G}_0(-\xi, v)\,\frac{dS(v)}{dv}\,dv = -\int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(-\xi, v)\,\frac{dS(v)}{dv}\,dv$$
$$= \int_0^{2\pi R} \frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{G}_0(-\xi, v)\,S(v)\,dv$$

und

$$\int_0^{2\pi R} \cos\left(\frac{-\xi - u}{R}\right)\tilde{Z}(u)\,du = \int_0^{2\pi R} \cos\left(\frac{\xi + u}{R}\right)Z(u)\,du = -\int_0^{-2\pi R} \cos\left(\frac{\xi - v}{R}\right)Z(v)\,dv$$
$$= \int_{-2\pi R}^{0} \cos\left(\frac{\xi - v}{R}\right)Z(v)\,dv = \int_0^{2\pi R} \cos\left(\frac{\xi - v}{R}\right)Z(v)\,dv.$$

---

[20]) Der Beweis wäre nach dem Muster der Betrachtungen in § 3 I zu führen.

In ähnlicher Weise findet man, wenn man in (35) und (36) alle Glieder einzeln untersucht, daß die Funktionen

$$\tilde{Z}(\xi), \quad \tilde{S}(\xi)$$

jenen beiden Integro-Differentialgleichungen genügen. Mithin muß, wie behauptet,

$$\tilde{Z}(\xi) = Z(-\xi) = Z(\xi), \quad \tilde{S}(\xi) = -S(\xi) = S(\xi) \tag{41}$$

sein. Augenscheinlich ist demnach wirklich

$$\int_0^{2\pi R} S(u)\,du = 0, \tag{42}$$

$$\int_0^{2\pi R} \left[\sin\frac{u}{R} Z(u) - \frac{2\omega}{\delta_0}\cos\frac{u}{R} S(u)\right] du = 0. \tag{43}$$

§ 3.

Diskussion der Verzweigungsgleichung.

Sei $\mathfrak{H}(\xi, u)$ der lösende Kern der Integralgleichung

$$Z(\xi) = \int_E N(\xi, u) Z(u)\,du + \Theta(\xi), \tag{44}$$

demnach

$$Z(\xi) = \Theta(\xi) - \int_E \mathfrak{H}(\xi, u)\Theta(u)\,du.\ ^{21}) \tag{45}$$

Für die weitere Verwendung stellen wir die folgende Tabelle zusammen:

	$\mathfrak{H}(\xi, u)$	
Erster Umlauf von ξ	$\mathfrak{H}_{11}(\xi, u)$	$\mathfrak{H}_{12}(\xi, u)$
Zweiter Umlauf von ξ	$\mathfrak{H}_{21}(\xi, u)$	$\mathfrak{H}_{22}(\xi, u)$
	Erster Umlauf von u	Zweiter Umlauf von u

Es ist leicht zu sehen, daß in der Entwicklung von $Z(\xi)$, $S(\xi)$ von d unabhängige Glieder, d. h. Glieder von der Form

$$\sum_{k,l}^{1\ldots\infty} a_{kl}\,\eta^k\,\mu^l$$

nicht vorkommen. Setzt man nämlich in (35) und (36) vorübergehend $d = 0$, so findet man in der Schreibweise des § 3 I

$$|\bar{\Omega}| \leqq \alpha_8(|\eta| + |\mu| + |\bar{\Omega}|)|\bar{\Omega}|, \tag{46}$$

[21]) Es sei daran erinnert, daß das Integrationsgebiet die doppelt durchlaufene Strecke $0, 2\pi R$ ist.

demnach, wenn $\bar{\Omega} \neq 0$ ist,

$$1 \leqq \alpha_s (|\eta| + |\mu| + |\bar{\Omega}|). \tag{47}$$

Wir wählen $|\eta|$ und $|\mu|$ so klein, daß gleichzeitig

$$\alpha_s |\eta| < \frac{1}{4}, \quad \alpha_s |\mu| < \frac{1}{4}, \quad \alpha_s |\bar{\Omega}| < \frac{1}{2} \tag{48}$$

gilt. Dies führt zu einem Widerspruch, der sich nur durch die Annahme $\bar{\Omega} = 0$ löst.

Wir bestimmen jetzt diejenigen Glieder der Entwicklung von Z und S nach Potenzen von d, η und μ, die entsprechend d und $d\eta$ enthalten. Was die zuerst genannten Glieder betrifft, so sind sie einfach gleich

$$\bar{B}^2 R^2 d \cos \frac{\xi}{R} \quad \text{und} \quad 2 \frac{\omega}{\delta_0} \bar{B}^2 R^2 d \sin \frac{\xi}{R}. \tag{49}$$

In der Tat ist nämlich nach bekannten Sätzen (vgl. die Tabelle (27))

$$\int_E \mathfrak{H}(\xi, u) w_2(u) du = 0, \tag{50}$$

mithin

$$w_2(\xi) - \int \mathfrak{H}(\xi, u) w_2(u) du = w_2(\xi), \tag{51}$$

was, wie aus (35) und (36) ersichtlich ist, unsere Behauptung nach sich zieht. Um die Glieder von der Form $d\eta \chi(\xi)$ zu ermitteln, bestimmen wir vor allem die in (35) und (36) rechterhand vorkommenden Ausdrücke

$$\frac{\eta}{\delta_0^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u) \left[2 \delta_0 R^2 \frac{d^2 Z^{(1)}}{du^2} + 2 R \omega \frac{dS^{(1)}}{du} \right] du \tag{52}$$

und

$$\frac{\eta}{\delta_0^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u) \left[2 \delta_0 R^2 \frac{d^2 S^{(1)}}{du^2} - 2 R \omega \frac{dZ^{(1)}}{du} \right] du \tag{53}$$

für

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(u) &= \bar{B}^2 R^2 d \cos \frac{u}{R}, \\ S^{(1)}(u) &= \frac{2\omega}{\delta_0} \bar{B}^2 R^2 d \sin \frac{u}{R}. \end{aligned} \tag{54}$$

Eine einfache Rechnung ergibt für (52) und (53) entsprechend die Werte

$$-\frac{2\eta}{\delta_0^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u) \bar{B}^2 R^2 d \frac{\delta_0^2 - 2\omega^2}{\delta_0} \cos \frac{u}{R} du \tag{55}$$

und

$$-\frac{2\eta\omega}{\delta_0^2 R^2} \int_0^{2\pi R} \mathfrak{G}_0(\xi, u) \bar{B}^2 R^2 d \sin \frac{u}{R} du \tag{56}$$

der wegen (24) und (25) einfacher

$$-\frac{\delta_0^2-2\omega^2}{2\delta_0\omega^2}\,d\eta\,\overline{B}^2R^2\cos\frac{\xi}{R}=\eta\,d\,q_1\cos\frac{\xi}{R} \tag{57}$$

und

$$-\frac{1}{2\omega}\,d\eta\,\overline{B}^2R^2\sin\frac{\xi}{R}=\eta\,d\,q_2\sin\frac{\xi}{R}\,. \tag{58}$$

Der Auflösungsformel (45) und der Tabelle auf S. 92 gemäß erhält man für die gesuchten Glieder die Formeln

$$-\eta\,d\left\{q_1\cos\frac{\xi}{R}-\int_0^{2\pi R}\left[\mathfrak{H}_{11}(\xi,u)\,q_1\cos\frac{u}{R}+\mathfrak{H}_{12}(\xi,u)\,q_2\sin\frac{u}{R}\right]\right\}du \tag{59}$$

und

$$-\eta\,d\left\{q_2\sin\frac{\xi}{R}-\int_0^{2\pi R}\left[\mathfrak{H}_{21}(\xi,u)\,q_1\cos\frac{u}{R}+\mathfrak{H}_{22}(\xi,u)\,q_2\sin\frac{u}{R}\right]\right\}du. \tag{60}$$

Die Entwicklungen für $Z(\xi)$ und $S(\xi)$ sind jetzt in (34) einzusetzen. Man gewinnt so eine Gleichung („Verzweigungsgleichung“) zur Bestimmung von η in Abhängigkeit von d und μ. Wie eine einfache Rechnung zeigt, hat das Glied von der Form konst. d linkerhand den Wert d und hebt sich gerade gegen den auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Wert. Für das Glied von der Form konst. $d\eta$ erhält man zunächst den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&-\eta\,d\int_0^{2\pi R}\left[q_1\cos^2\frac{u}{R}+\frac{2\omega}{\delta_0}q_2\sin^2\frac{u}{R}\right]du\\
&+\eta\,d\int_0^{2\pi R}q_1\cos\frac{u}{R}\,du\int_0^{2\pi R}\left[\mathfrak{H}_{11}(\xi,u)\cos\frac{\xi}{R}+\frac{2\omega}{\delta_0}\mathfrak{H}_{21}(\xi,u)\sin\frac{\xi}{R}\right]d\xi\\
&+\eta\,d\int_0^{2\pi R}q_2\sin\frac{u}{R}\,du\int_0^{2\pi R}\left[\mathfrak{H}_{12}(\xi,u)\cos\frac{\xi}{R}+\frac{2\omega}{\delta_0}\mathfrak{H}_{22}(\xi,u)\sin\frac{\xi}{R}\right]d\xi.
\end{aligned} \tag{61}$$

Die in den beiden letzten Summanden vorkommenden Integrale in bezug auf ξ sind für alle u gleich Null. Das ist, wie man leicht sieht, die Folge der Beziehung

$$\int_E\mathfrak{H}(\xi,u)\,w_2(\xi)\,d\xi=0\,. \tag{62}$$

Der erste Summand in (61) hat, wie man unmittelbar findet, den Wert

$$\eta\,d\,\frac{\delta_0^3}{2\omega^2(4\omega^2+\delta_0^2)}\,. \tag{63}$$

Der Koeffizient von ηd ist für $\mu = 0$ und darum auch für alle hinreichend kleinen $|\mu|$ von Null verschieden. Da, wie wir wissen, alle Glieder der „Verzweigungsgleichung" den Faktor d haben, so liefert diese nach Division durch d für η einen Ausdruck von der Form

$$\eta = \mathfrak{p}(d, \mu), \tag{64}$$

unter $\mathfrak{p}$ eine Potenzreihe verstanden, die für hinreichend kleine $|d|$ und $|\mu|$ konvergiert.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist die zu Beginn dieses Kapitels aufgeworfene Frage nach der Existenz periodischer Lösungen der Gleichungen (3), d. h. periodischer Schwingungszustände des Ringes, im positiven Sinne beantwortet. Daß wir nur Lösungen von der Form (7) und nicht auch welche von der Form (7*) erhalten haben, liegt nur an der speziellen Voraussetzung (43), die wir zuletzt eingeführt haben. Sei in der Tat $Z(u)$, $S(u)$ die vorhin gefundene Lösung. Den Ergebnissen des § 1 II zufolge ist auch $Z(u - u_0)$, $S(u - u_0)$ für alle u_0 eine Lösung. Mit $u_0 = \frac{\pi}{2}$ gelangen wir zu einem System von Funktionen von der Form (7*). Da δ_0 nach (5) zwei verschiedene Werte haben kann, so führen unsere Betrachtungen doch zu zwei wesentlich verschiedenen Bewegungsvorgängen. Die gefundenen Schwingungszustände lassen sich geometrisch als fortschreitende Wellen charakterisieren. Wie man sich leicht überzeugt, bleibt dabei die Gesamtkonfiguration des Systems unverändert. Das Ganze rotiert, von dem festen Koordinatensystem aus beurteilt, im positiven Sinne mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega + \delta_0$. Irgendeine bestimmte Lage innerhalb dieser Konfiguration nehmen freilich im Laufe der Zeit immer wieder andere Massenteilchen ein. Die Bahn eines jeden Teilchens in der Ebene x, y ist eine geschlossene Kurve, die in der Zeit $\frac{2\pi}{|\delta_0|}$ einmal voll beschrieben wird.

§ 4.

Weitere periodische Lösungen.

Wir kehren noch einmal zu den Betrachtungen des § 1 zurück und suchen Lösungen der Differentialgleichungen (1) von der Form

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta(s,t) = Z(s - R\delta t) = Z(u), \\ \sigma &= \sigma(s,t) = S(s - R\delta t) = S(u) \end{aligned} \tag{65}$$

zu bestimmen, unter $Z(u)$ und $S(u)$ *periodische Funktionen mit der Periode* $\frac{2\pi R}{m}$ $(m > 1)$ verstanden. Offenbar kommen wir auch jetzt noch zu den Integro-Differentialgleichungen (3).

Die Differentialgleichungen (4) haben nicht-triviale periodische Lösungen mit der Periode $\frac{2\pi R}{m}$ nur, wenn δ^2 den Wert

$$(66)\qquad \delta_1^2 = \frac{1}{m^2}\left(2\omega^2 + \frac{\varkappa\pi\mu}{R}\right) = \frac{1}{m^2}\delta_0^2 = \frac{\varkappa}{m^2 R^2}(2M + 3\mu\pi R)$$

hat[22]).

Es handelt sich also, wie man durch Einsetzung von $\delta = \delta_1 + \eta^*$ in (3) findet, um die Ermittelungen der Lösungen mit der Periode $\frac{2\pi R}{m}$ der Integro-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
R^2\delta_1^2\frac{d^2Z}{du^2} + 2R\delta_1\omega\frac{dS}{du} - \nu Z &= -\eta^*\left(2\delta_1 R^2\frac{d^2Z}{du^2} + 2R\omega\frac{dS}{du}\right)\\
&\quad - R^2\eta^{*2}\frac{d^2Z}{du^2} + R\delta^2\left(\frac{dS}{du}\right)^2 - 2\delta\omega Z\frac{dS}{du} + \delta^2 Z\left(\frac{dS}{du}\right)^2\\
&\quad - M\varkappa\frac{1}{R}\left(\frac{Z^2}{R^2} - \frac{Z^3}{R^3} + \ldots\right) + \varkappa\int_C \mu\, du'\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right],\\
R^2\delta_1^2\frac{d^2S}{du^2} - 2R\delta_1\omega\frac{dZ}{du} &= -\eta^*\left(2\delta_1 R^2\frac{d^2S}{du^2} - 2R\omega\frac{dZ}{du}\right)\\
&\quad - R^2\eta^{*2}\frac{d^2S}{du^2} - R\delta^2 Z\frac{d^2S}{du^2} - 2R\delta^2\frac{dS}{du}\frac{dZ}{du}\\
&\quad + \varkappa\int_C \mu\, du'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right] \qquad (\delta = \delta_1 + \eta^*).
\end{aligned} \tag{67}$$

Das Verfahren verläuft ganz wie in den vorhergehenden Paragraphen. Auch die Normierung der Lösungen ist zu der dort vorgenommenen analog, nur tritt jetzt als Grundintervall die Strecke $0, \frac{2\pi R}{m}$ an Stelle der Strecke $0, 2\pi R$ ein. Dabei ist zu beachten, daß *die Integralausdrücke in* (67) *über die ganze Kreisperipherie erstreckt sind.* Der Bogen $0, 2\pi R$ zerfällt in m Bögen, auf denen Z und S sich periodisch wiederholende Werte haben:

$$(68)\qquad \begin{cases} Z(u) = Z\left(u + \frac{2\pi R}{m}\right) = \ldots = Z\left(u + \frac{2(m-1)\pi R}{m}\right), \\ S(u) = S\left(u + \frac{2\pi R}{m}\right) = \ldots = S\left(u + \frac{2(m-1)\pi R}{m}\right), \quad 0 \leqq u \leqq \frac{2\pi R}{m}. \end{cases}$$

Nur noch ein Wort über die Abschätzung beim Konvergenzbeweis. Man sieht leicht ein, daß die Höchstwerte von $|d|$ und $|\mu|$ kleiner als in dem Falle $m = 1$ angenommen werden müssen, um die Konvergenz zu sichern, und zwar um so kleiner, je größer m ist. Das kommt daher, weil $\delta_1^2 = \frac{\delta_0^2}{m^2}$ ist.

---

[22]) Jedem Wert δ_1^2 entsprechen zwei verschiedene periodische Bewegungszustände

$$Z'(s + \delta_1 R t),\ S'(s + \delta_1 R t);\quad Z''(s - \delta_1 R t),\ S''(s - \delta_1 R t).$$

Drittes Kapitel.

Ein Ring von beliebiger Dichte. Unendlich kleine Schwingungen. Stabilitätsbetrachtungen.

Wir lassen nunmehr die Voraussetzung, die Dichte μ sei klein, fallen. Um zu einem Existenzbeweise periodischer Lösungen der Differentialgleichungen (18) I bzw., bei Abwesenheit eines störenden Körpers, der Gleichungen (1) dieses Kapitels zu gelangen, muß man zuvörderst die Integralausdrücke J und L in Glieder erster und höherer Ordnung in bezug auf Z und S spalten und diejenigen erster Ordnung nach links schaffen. Die Lösung wird sodann durch sukzessive Approximationen gewonnen. Die Einzelheiten des Konvergenzbeweises sollen bei einer anderen Gelegenheit später durchgeführt werden[23]). Für den Augenblick handelt es sich lediglich um eine Untersuchung der Stabilität des Systems unter Zugrundelegung „der Methode der kleinen Schwingungen". Hierzu genügt es, unendlich kleine Schwingungen zu betrachten. Dementsprechend werden in den Gleichungen (3) rechter Hand Glieder höherer Ordnung in bezug auf Z und S vernachlässigt. Es gilt jetzt also

$$
\begin{aligned}
&R^2\delta^2\frac{d^2Z}{du^2}+2R\delta\omega\frac{dS}{du}-\nu Z-\varkappa\int_C{}'\mu\,du'\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]=0,\\
&R^2\delta^2\frac{d^2S}{du^2}-2R\delta\omega\frac{dZ}{du}-\varkappa\int_C{}'\mu\,du'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]=0.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Durch das Zeichen $\int_C{}'$ wird angedeutet, daß in den beiden Integralausdrücken nur noch Glieder erster Ordnung in bezug auf S und Z berücksichtigt werden sollen.

Gibt es, unter m eine beliebige natürliche Zahl verstanden, für geeignete Werte von δ Lösungen dieser Gleichungen von der Form

$$
Z=\mathfrak{Z}\cos\frac{mu}{R},\qquad S=\mathfrak{S}\sin\frac{mu}{R}\,?
\tag{70}
$$

Wir führen diese Werte in die obigen Integralausdrücke ein und erhalten zunächst

---

[23]) Von wesentlicher Bedeutung für den Konvergenzbeweis erscheint hierbei eine Abschätzung der Glieder zweiten und höheren Grades von $\dot{J}-J$ und $\dot{L}-L$, die sich ohne Schwierigkeiten aus dem Hilfssatz des vierten Kapitels ableiten läßt.

$$-\int_C \left[\frac{\partial}{\partial \nu}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial \nu_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]du'=\int_C \frac{1}{\varrho^2}(Z-Z')du'$$

$$+2\int_C Z'\frac{1}{\varrho^2}\sin^2\frac{1}{2R}(u'+S'-u-S)du'$$

(71)

$$+\int_C \frac{2R}{\varrho^2\varrho_0^2}\left\{\varrho_0^2\sin^2\frac{1}{2R}(u'+S'-u-S)-\varrho^2\sin^2\frac{1}{2R}(u'-u)\right\}du'$$

$$=L_1+L_2+L_3.\ ^{24})$$

Es gilt nun

$$(72)\quad Z-Z'=\mathfrak{Z}\left(\cos\frac{mu}{R}-\cos\frac{mu'}{R}\right)=-2\mathfrak{Z}\sin\frac{m(u+u')}{2R}\sin\frac{m(u-u')}{2R},$$

mithin, mit

$$u'=u+R\varphi,$$

$$L_1=2R\mathfrak{Z}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^2}\sin m\left(\frac{u}{R}+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{m\varphi}{2}\,d\varphi+\dots$$

$$(73)\qquad =2R\mathfrak{Z}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^2}\left[\sin\frac{mu}{R}\cos\frac{m\varphi}{2}+\cos\frac{mu}{R}\sin\frac{m\varphi}{2}\right]\sin\frac{m\varphi}{2}\,d\varphi+\dots$$

$$=2R\mathfrak{Z}\cos\frac{mu}{R}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi+\dots=m\pi\frac{\mathfrak{Z}}{R}\cos\frac{mu}{R}+\dots.$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind von zweiter oder höherer Ordnung in bezug auf $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{S}$.

Es gilt weiter

$$\varrho^2=(R+Z)^2+(R+Z')^2-2(R+Z)(R+Z')\cos\frac{1}{R}(u'-u+S'-$$

$$=2R^2+2RZ+2RZ'+Z^2+Z'^2$$

$$-2(R^2+RZ+RZ'+ZZ')\cos\frac{1}{R}(u'-u+S'-$$

(74)

$$=2R^2+2RZ+2RZ'-2R^2\left(\cos\frac{u'-u}{R}-\frac{S'-S}{R}\sin\frac{u'-u}{R}\right)$$

$$-2R(Z+Z')\cos\frac{u'-u}{R}+\dots=\varrho_0^2+2R(Z+Z')$$

$$-2R(Z+Z')\cos\frac{u'-u}{R}+2R(S'-S)\sin\frac{u'-u}{R}+$$

[24]) Man vergleiche die analogen Betrachtungen des vierten Kapitels, insbesondere die Formeln (4) IV und (5) IV. Die Formel (71) des Textes ergibt sich, wenn man in (4) IV und (5) IV einfach $\dot{Z}=\dot{S}=0$ setzt.

und

$$
\begin{aligned}
&2\varrho_0^2 \sin^2 \frac{1}{2R}(u' + S' - u - S) - 2\varrho^2 \sin^2 \frac{u'-u}{2R} \\
&= 2\varrho_0^2 \left(\sin \frac{u'-u}{2R} + \frac{S'-S}{2R} \cos \frac{u'-u}{2R}\right)^2 - 2\varrho^2 \sin^2 \frac{u'-u}{2R} + \dots \\
&= 2\varrho_0^2 \left(\sin^2 \frac{u'-u}{2R} + \frac{S'-S}{R} \sin \frac{u'-u}{2R} \cos \frac{u'-u}{2R}\right) - 2\varrho^2 \sin^2 \frac{u'-u}{2R} + \dots \\
(75)\quad &= 2\varrho_0^2 \left(\sin^2 \frac{u'-u}{2R} + \frac{S'-S}{2R} \sin \frac{u'-u}{R}\right) - 2\varrho_0^2 \sin^2 \frac{u'-u}{2R} \\
&- 4R(Z+Z') \sin^2 \frac{u'-u}{2R} + 4R(Z+Z') \cos \frac{u'-u}{R} \sin^2 \frac{u'-u}{2R} \\
&\qquad - 4R(S'-S) \sin \frac{u'-u}{R} \sin^2 \frac{u'-u}{2R} + \dots \\
&= 4R(Z+Z') \sin^2 \frac{u'-u}{2R} \left(\cos \frac{u'-u}{R} - 1\right) + \dots .
\end{aligned}
$$

Wir finden jetzt leicht

$$
\begin{aligned}
L_2 &= 2 \int_C Z' \frac{1}{\varrho_0^2} \sin^2 \frac{1}{2R} \left(u' + S' - u - S\right) du' + \dots \\
(76)\quad &= 2\mathfrak{Z} \int_C \cos \frac{mu'}{R} \frac{1}{\varrho_0^2} \sin^2 \frac{u'-u}{2R} du' + \dots = \frac{\mathfrak{Z}}{2R^2} \int_C \cos \frac{mu'}{R} du' = 0 + \dots ^{25})
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
L_3 &= 4R^2 \mathfrak{Z} \int_C \frac{1}{\varrho_0^4} \left(\cos \frac{mu}{R} + \cos \frac{mu'}{R}\right) \sin^2 \frac{u'-u}{2R} \left(\cos \frac{u'-u}{R} - 1\right) du' \\
&= -16R^2 \mathfrak{Z} \int_C \frac{1}{\varrho_0^4} \left(\cos \frac{m(u+u')}{2R} \cos \frac{m(u'-u)}{2R}\right) \sin^4 \frac{u'-u}{2R} du' \\
(77)\quad &= -\frac{\mathfrak{Z}}{R} \int_0^{2\pi} \cos \frac{m}{2R}(2u + R\varphi) \cos \frac{m\varphi}{2} d\varphi \\
&= -\frac{\mathfrak{Z}}{R} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{mu}{R} \cos \frac{m\varphi}{2} - \sin \frac{mu}{R} \sin \frac{m\varphi}{2}\right) \cos \frac{m\varphi}{2} d\varphi \\
&= -\frac{\mathfrak{Z}}{R} \cos \frac{mu}{R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{m\varphi}{2} d\varphi = -\pi \frac{\mathfrak{Z}}{R} \cos \frac{mu}{R}.
\end{aligned}
$$

Alles in allem ergibt sich darum

$$
(78)\quad -\int_C \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial \nu_0} \log \frac{R}{\varrho_0}\right] du' = (m-1)\pi \frac{\mathfrak{Z}}{R} \cos \frac{mu}{R} + \dots .
$$

---

[25]) Man beachte, daß $\varrho_0^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{u'-u}{2R}$ ist.

Nunmehr der zweite Integralausdruck in (69). Man findet zunächst leicht

$$-\int_C \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial \tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]du'=-\int_C \frac{Z'}{\varrho_0^2}\sin\frac{u'-u}{R}\,du'$$

$$+\int_C (R+Z')\left\{\frac{1}{\varrho_0^2}\sin\frac{u'-u}{R}-\frac{1}{\varrho^2}\sin\frac{u'+S'-u-S}{R}\right\}du'=L_4+L_5\ ^{26}) \tag{79}$$

und

$$L_4=-\mathfrak{Z}R\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^2}\cos\left(\frac{mu}{R}+m\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=-\mathfrak{Z}R\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^2}\left[\cos\frac{mu}{R}\cos m\varphi-\sin\frac{mu}{R}\sin m\varphi\right]\sin\varphi\,d\varphi \tag{80}$$

$$=\mathfrak{Z}R\sin\frac{mu}{R}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^2}\sin m\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Es ist weiter wegen (74)

$$\frac{1}{\varrho_0^2}\sin\frac{u'-u}{R}-\frac{1}{\varrho^2}\sin\frac{1}{R}(u'+S'-u-S)$$

$$=\frac{1}{\varrho_0^2\varrho^2}\left[(\varrho^2-\varrho_0^2)\sin\frac{u'-u}{R}-\varrho_0^2\frac{S'-S}{R}\cos\frac{u'-u}{R}\right]+\ldots=\frac{1}{\varrho_0^2\varrho^2}\left\{\left[2R(Z+Z'\right.\right.$$

$$-2R(Z+Z')\cos\frac{u'-u}{R}+2R(S'-S)\sin\frac{u'-u}{R}+\ldots\Big]\sin\frac{u'-u}{R} \tag{81}$$

$$\left.\left.-\varrho_0^2\frac{S'-S}{R}\cos\frac{u'-u}{R}+\ldots\right\}\right.$$

$$=\frac{1}{\varrho_0^4}\left\{4R(Z+Z')\sin^2\frac{u'-u}{2R}\sin\frac{u'-u}{R}\right.$$

$$\left.+\frac{S'-S}{R}\left[2R^2\sin^2\frac{u'-u}{R}-\varrho_0^2\cos\frac{u'-u}{R}\right]\right\}+\ldots$$

darum

$$L_5=4\mathfrak{Z}R^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^4}\left(\cos\frac{mu}{R}+\cos\left(\frac{mu}{R}+m\varphi\right)\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$+2\mathfrak{S}R^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^4}\left(\sin\left(\frac{mu}{R}+m\varphi\right)-\sin\frac{mu}{R}\right)\left(\sin^2\varphi-\frac{\varrho_0^2}{2R^2}\cos\varphi\right)d\varphi+\ldots \tag{82}$$

$$=L_6+L_7+\ldots.$$

---

[26]) Man vergleiche die Formel (48) des vierten Kapitels, in der im vorliegenden Falle $\dot{Z}=0$, $\dot{S}=0$, $\dot{\varrho}=\varrho_0$ zu setzen ist.

Man findet jetzt ohne Schwierigkeiten

$$L_6 = 4\mathfrak{Z}R^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^4}\left(\cos\frac{mu}{R}+\cos\frac{mu}{R}\cos m\varphi-\sin\frac{mu}{R}\sin m\varphi\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= -4\mathfrak{Z}R^3\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^2}\sin\frac{mu}{R}\sin m\varphi\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi = -\mathfrak{Z}R\sin\frac{mu}{R}\int_0^{2\pi}\frac{\sin m\varphi\sin\varphi}{\varrho_0^2}\,d\varphi.$$

Dieses Glied hebt sich gegen den Ausdruck (80). Weiter ist nach einigen Vereinfachungen

$$L_7 = \mathfrak{S}R\sin\frac{mu}{R}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varrho_0^4}(\cos m\varphi-1)(2R^2\sin^2\varphi-\varrho_0^2\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= -\mathfrak{S}R\sin\frac{mu}{R}\int_0^{2\pi}\frac{2\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{16R^4\sin^4\frac{\varphi}{2}}\left(8R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}-4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right)d\varphi$$

(84)

$$= -\frac{\mathfrak{S}}{2R}\sin\frac{mu}{R}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$= -\frac{\mathfrak{S}}{2R}\sin\frac{mu}{R}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = -m\pi\frac{\mathfrak{S}}{R}\sin\frac{mu}{R}.$$

Alles in allem ist also

$$-\int_C\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right]du' = -m\pi\frac{\mathfrak{S}}{R}\sin\frac{mu}{R}+\ldots. \tag{85}$$

Führt man jetzt in die Differentialgleichungen (69) für Z und S die Werte (70) ein, so findet man nach einer geringfügigen Umformung die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}\left(m^2\delta^2+\nu-\varkappa\mu(m-1)\frac{\pi}{R}\right)-2m\delta\omega\mathfrak{S}=0,\\ 2m\delta\omega\mathfrak{Z}-\mathfrak{S}\left(m^2\delta^2+\varkappa\mu m\frac{\pi}{R}\right)=0,\end{aligned} \tag{86}$$

oder wegen

$$\nu = \omega^2+M\varkappa\frac{1}{R^2} = 2\frac{M\varkappa}{R^2}+\frac{\pi\varkappa\mu}{R}, \tag{87}$$

wenn man die Gesamtmasse des Ringes, $2\pi R\mu$, mit M' bezeichnet und $m\delta = \bar{\delta}$ setzt, einfacher

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}\left[\bar{\delta}^2+\frac{\varkappa}{R^2}\left(2M-M'\frac{m-2}{2}\right)\right]-2\bar{\delta}\omega\mathfrak{S}=0,\\ 2\omega\bar{\delta}\mathfrak{Z}-\mathfrak{S}\left(\bar{\delta}^2+\varkappa\frac{m}{2}\frac{M'}{R^2}\right)=0.\end{aligned} \tag{88}$$

Aus (88) ergibt sich zur Bestimmung von $\bar{\delta}$ die Gleichung

$$(89)\qquad \begin{vmatrix} \bar{\delta}^2 + \left(2M - M^r \frac{m-2}{2}\right)\frac{\varkappa}{R^2}, & -2\bar{\delta}\omega \\ 2\bar{\delta}\omega, & -\left(\bar{\delta}^2 + \varkappa \frac{m}{2}\frac{M^r}{R^2}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach einer leichten Umformung

$$(90)\qquad \bar{\delta}^4 - \bar{\delta}^2 (2M + M^r)\frac{\varkappa}{R^2} + \frac{\varkappa^2}{R^4}\left(2M - M^r \frac{m-2}{2}\right)\frac{m}{2} M^r = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind, wie man leicht verifiziert,

$$(91)\qquad \bar{\delta}_{1,2} = \pm \frac{\varkappa^{\frac{1}{2}}}{R}\left\{2M + M_r\left(1 - \frac{m}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \bar{\delta}_{3,4} = \pm \frac{\varkappa^{\frac{1}{2}}}{R}\left(M^r \frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Solange

$$(92)\qquad m < m_0 = \frac{4M}{M^r} + 2$$

ist, sind alle vier Wurzeln reell, für $m > m_0$ sind $\bar{\delta}_{1,2}$ imaginär. Zu einer jeden natürlichen Zahl $m < m_0$ gehören vier periodische Bewegungszustände von der Form

$$(93)\qquad \mathfrak{Z}_j \cos\frac{m}{R}(s - R\delta_j t), \quad \mathfrak{S}_j \sin\frac{m}{R}(s - R\delta_j t), \quad \delta_j = \frac{\bar{\delta}_j}{m} \quad (j = 1, \ldots, 4).$$

Für den Quotienten $\frac{\mathfrak{S}_j}{\mathfrak{Z}_j}$ ergibt sich aus (88) der Wert

$$(94)\qquad \frac{2\omega\delta_j}{\delta_j^2 + \varkappa\frac{m}{2}\frac{M^r}{R^2}}.$$

Ersetzt man in (93) t durch $t + \frac{\pi}{2\delta_j m}$, so kommt man zu den (nicht wesentlich verschiedenen) Schwingungszuständen von der Form

$$(95)\qquad \mathfrak{Z}_j \sin\frac{m}{R}(s - R\delta_j t), \qquad -\mathfrak{S}_j \cos\frac{m}{R}(s - R\delta_j t).$$

Die Schwingungsperioden haben den Wert

$$(96)\qquad \Theta_{1,2} = \frac{2\pi R}{\varkappa^{\frac{1}{2}}}\left(2M + M^r\left(1 - \frac{m}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \Theta_{3,4} = \frac{2\pi R}{\varkappa^{\frac{1}{2}}}\left(M^r \frac{m}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Dauer einer vollen Umdrehung des Ringes ist

$$(97)\qquad \Theta = \frac{2\pi R}{\varkappa^{\frac{1}{2}}}\left(M + \frac{M^r}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Für (96) können wir dann die übersichtlicheren Formeln setzen

$$(98)\qquad \Theta_{1,2} = \Theta\left(\frac{M + \frac{1}{2}M^r}{2M + M^r\left(1 - \frac{m}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Theta_{3,4} = \Theta\left(\frac{M + \frac{1}{2}M^r}{M^r\frac{m}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für kleine m ist $\Theta_{3,4}$ groß, die zugehörigen Eigenschwingungen sind für alle m „stabil". Die Schwingungen vom Typus 1 und 2 sind nach (91) nur so lange „stabil", als $m < \frac{4M}{M'} + 2$ ist. Ihre Periode ist mit der Umdrehungsdauer des Ringes vergleichbar und nimmt mit m zu. Nach H. Struve ist das Verhältnis der Masse des Saturn zur Gesamtmasse seiner Ringe größer als 100000. Nehmen wir bei dem von uns betrachteten „ebenen" Modell $M : M' = 100000$ an, so finden wir, daß die ersten $4 \cdot 10^5$ Schwingungen vom Typus 1 und 2 „stabil" sind. Der Ring ist darum gewiß als „praktisch stabil" aufzufassen. Die Dauer einer Grundschwingung vom Typus 3 und 4 beträgt etwa 450 Θ.

Von Interesse ist der besondere Fall $M = 0$. *Hier handelt es sich um einen Ring ganz ohne Zentralkörper.* Jetzt sind die Grundschwingungen vom Typus 1 und 2, sowie alle Schwingungen vom Typus 3 und 4 „stabil".

Viertes Kapitel.

Ein Hilfssatz[27]).

Wir wollen jetzt den Hilfssatz, auf den sich der Konvergenzbeweis des § 3 I gründet, beweisen. Wir beginnen mit dem Integralausdruck

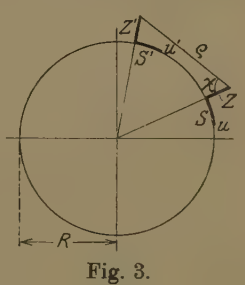

Fig. 3.

$$(1) \qquad J = \int_C \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho} - \frac{\partial}{\partial \nu_0} \log \frac{R}{\varrho_0} \right) du' .$$

Es mögen $Z(u)$ und $\dot{Z}(u)$ irgendwelche auf C erklärte reelle oder komplexe, nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktionen bezeichnen, und es möge

$$(1^*) \qquad \overline{\Omega} = \mathrm{Max} \left\{ |Z|, |S|, |\dot{Z}|, |\dot{S}|, \left|\frac{d}{du} Z\right|, \ldots, \left|\frac{d^2}{du^2} \dot{S}\right| \right\} < \alpha^0 \quad (\alpha^0 \text{ konst.})$$

sein. Wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, ist (vgl. die Fig. 3)

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{R}{\varrho} = -\frac{\cos \chi}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho^2} \left[R + Z - (R + Z') \cos \frac{u' + S' - u - S}{R} \right].$$

Werden die zu den Funktionen $\dot{Z}$, $\dot{S}$ gehörigen geometrischen Größen mit einem Punkt oben gekennzeichnet, so ist

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{\nu}} \log \frac{R}{\dot{\varrho}} = -\frac{\cos \dot{\chi}}{\dot{\varrho}} = -\frac{1}{\dot{\varrho}^2} \left[R + \dot{Z} - (R + \dot{Z}') \cos \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{R} \right],$$

---

[27]) In den folgenden Betrachtungen sind alle uneigentlichen Integrale stets als Cauchysche Hauptwerte aufzufassen.

mithin

$$\dot{J} - J = \int_C \left[\frac{\cos \chi}{\varrho} - \frac{\cos \dot{\chi}}{\dot{\varrho}} \right] du' = \int_C \Delta \, du', \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Delta = {} & \frac{1}{\varrho^2} \left[R + Z - (R + Z') \cos \frac{u' + S' - u - S}{R} \right] \\ & - \frac{1}{\dot{\varrho}^2} \left[R + \dot{Z} - (R + \dot{Z}') \cos \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{R} \right. \\ = {} & \frac{1}{\varrho^2 \dot{\varrho}^2} \left[(\dot{\varrho}^2 - \varrho^2)(\dot{Z} - \dot{Z}') + \dot{\varrho}^2 \left\{ (\dot{Z}' - \dot{Z}) - (Z' - Z) \right\} \right. \\ & + \left\{ 2 \dot{\varrho}^2 (R + Z') \sin^2 \frac{u' + S' - u - S}{2R} - 2 \varrho^2 (R + \dot{Z}') \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R} \right. \\ = {} & \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\dot{J} - J = \int_C \Delta_1 \, du' + \int_C \Delta_2 \, du' + \int_C \Delta_3 \, du'. \tag{6}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(\dot{Z}' - \dot{Z}) - (Z' - Z) = (u' - u) \left(\frac{d\dot{Z}}{du} - \frac{dZ}{du} \right) + \frac{1}{2} (u' - u)^2 \left(\frac{d^2 \tilde{\dot{Z}}}{du^2} - \frac{d^2 \tilde{Z}}{du^2} \right), \tag{7}$$

unter $\frac{d^2 \tilde{\dot{Z}}}{du^2}$ und $\frac{d^2 \tilde{Z}}{du^2}$ die Werte der zweiten Ableitung von Z und $\dot{Z}$ in einem geeigneten, für die beiden Funktionen demselben, zwischen u und u' gelegenen Punkte verstanden. Man findet dann

$$\begin{aligned} \int_C \Delta_2 \, du = {} & \left(\frac{d\dot{Z}}{du} - \frac{dZ}{du} \right) \int_C (u' - u) \frac{du'}{\varrho^2} \\ & + \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{\varrho^2} (u' - u)^2 \left(\frac{d^2 \tilde{\dot{Z}}}{du^2} - \frac{d^2 \tilde{Z}}{du^2} \right) du' = J_1 + J_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Für alle reellen oder *komplexen* nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Funktionen Z und $\dot{Z}$ ist vor allem

$$|J_2| < \beta_1 \Omega, \quad \Omega = \operatorname{Max} \left\{ |Z - \dot{Z}|, |S - \dot{S}|, \ldots, \left| \frac{d^2}{du^2} (S - \dot{S}) \right| \right\} \text{ auf } C, \tag{9}$$

unter β_1 eine positive Konstante verstanden, wie später unter $\beta_2, \beta_3, \ldots$. Sei $\bar{u}'$ der zu u' in bezug auf den nach u hinführenden Radius symmetrische Punkt des Kreises C, der zugehörige Wert von ϱ sei mit $\bar{\varrho}$ bezeichnet. Es ist

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (Z - Z')^2 + 4 (R + Z)(R + Z') \sin^2 \frac{u' + S' - u - S}{2R}, \\ \bar{\varrho}^2 &= (Z - \bar{Z}')^2 + 4 (R + \bar{Z})(R + \bar{Z}') \sin^2 \frac{\bar{u}' + \bar{S}' - u - S}{2R}. \end{aligned} \tag{10}$$

Den Ausdruck J_1 können wir jetzt wie folgt umformen

$$J_1 = \left(\frac{d\dot{Z}}{du} - \frac{dZ}{du}\right)\int_u^{u+\pi R}(u'-u)\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\bar{\varrho}^2}\right)du'$$

$$= -\left(\frac{d\dot{Z}}{du} - \frac{dZ}{du}\right)\int_u^{u+\pi R}\frac{u'-u}{\varrho^2\bar{\varrho}^2}\left[(2Z - Z' - \bar{Z}')(\bar{Z}' - Z')\right.$$

(11)
$$+ 4(R+Z)(Z' - \bar{Z}')\sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R}$$

$$\left. + 4(R+Z)(R+\bar{Z}')\left\{\sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R} - \sin^2\frac{\bar{u}'+\bar{S}'-u-S}{2R}\right\}\right]du'$$

$$= J_3 + J_4 + J_5.$$

Wegen

(12)
$$\bar{Z}' - Z' = -(u'-u)\left(\frac{d\tilde{\bar{Z}}}{du} + \frac{d\tilde{Z}}{du}\right),$$ [28])

(13)
$$2Z - Z' - \bar{Z}' = -\frac{1}{2}(u'-u)^2\left(\frac{d^2\hat{Z}}{du^2} + \frac{d^2\hat{\bar{Z}}}{du^2}\right)$$

und

(14)
$$\sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R} = \left(\frac{u'+S'-u-S}{2R}\right)^2\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{u'+S'-u-S}{2R}\right)^2 + \ldots\right)$$

ist

(15)
$$|J_3| < \beta_2\,\Omega \quad \text{und} \quad |J_4| < \beta_3\,\Omega.$$

Es gilt jetzt weiter

(16)
$$\sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R} - \sin^2\frac{\bar{u}'+\bar{S}'-u-S}{2R} = \left(\frac{u'+S'-u-S}{2R}\right)^2 - \left(\frac{\bar{u}'+\bar{S}'-u-S}{2R}\right)^2 + \ldots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder in bezug auf $u'-u$ von der vierten oder höheren Ordnung sind. Für (16) kann man auch setzen

(17)
$$\sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R} - \sin^2\frac{\bar{u}'+\bar{S}'-u-S}{2R} = \frac{S'+\bar{S}'-2S}{2R}\cdot\frac{u'+S'-\bar{u}'-\bar{S}'}{2R} + \ldots.$$

Der erste Summand rechterhand ist von der dritten Ordnung in bezug auf $u'-u$.[29]) Aus (11) und (17) folgt jetzt

(18)
$$|J_5| < \beta_4\,\Omega,$$

---

[28]) Hier bezeichnet $\frac{d\tilde{Z}}{du}$ den Wert der Ableitung $\frac{dZ}{du}$ in einem gewissen Punkte $\tilde{u}$ zwischen u und u'. Der Wert von $\frac{dZ}{du}$ in dem Punkte $2u-\tilde{u}$ ist $\frac{d\tilde{\bar{Z}}}{du}$.

[29]) Das folgt aus den leicht aufzustellenden zu (12) und (13) analogen Formeln für seine beiden Faktoren.

mithin

$$|J_1| < \beta_5 \Omega \tag{19}$$

und wegen (8) und (9)

$$|\int_C \Delta_2 \, du'| < \beta_6 \Omega . \tag{20}$$

Wir wenden uns jetzt der Abschätzung des Integrals $\int_C \Delta_1 \, du'$ zu. Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}^2 - \varrho^2 &= (Z + \dot{Z} - Z' - \dot{Z}')(\dot{Z} - Z + Z' - \dot{Z}') \\ &+ 4\Big\{(R+\dot{Z})(R+\dot{Z}')\sin^2 \frac{u'+\dot{S}'-u-\dot{S}}{2R} \\ &- (R+Z)(R+Z')\sin^2 \frac{u'+S'-u-S}{2R}\Big\} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 . \end{aligned} \tag{21}$$

Wegen

$$\begin{aligned} Z + \dot{Z} - Z' - \dot{Z}' &= (Z - Z') + (\dot{Z} - \dot{Z}') = -(u'-u)\Big(\frac{dZ}{du} + \frac{d\dot{Z}}{du}\Big) \\ &- \frac{1}{2}(u'-u)^2\Big(\frac{d^2\check{Z}}{du^2} + \frac{d^2\check{\dot{Z}}}{du^2}\Big), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z} - Z + Z' - \dot{Z}' &= (\dot{Z} - Z) - (\dot{Z}' - Z') = (u'-u)\Big(\frac{dZ}{du} - \frac{d\dot{Z}}{du}\Big) \\ &+ \frac{1}{2}(u'-u)^2\Big(\frac{d^2\hat{Z}}{du^2} - \frac{d^2\hat{\dot{Z}}}{du^2}\Big) \end{aligned} \tag{23}$$

und

$$\dot{Z} - \dot{Z}' = -(u'-u)\frac{d\dot{Z}}{du} - \frac{1}{2}(u'-u)^2\frac{d^2\tilde{\dot{Z}}}{du^2} \tag{24}$$

ist

$$\int_C \frac{\mathfrak{t}_1}{\varrho^2\dot{\varrho}^2}(\dot{Z} - \dot{Z}')\,du' = \frac{d\dot{Z}}{du}\Big\{\Big(\frac{dZ}{du}\Big)^2 - \Big(\frac{d\dot{Z}}{du}\Big)^2\Big\}\int_C (u'-u)^3\frac{du'}{\varrho^2\dot{\varrho}^2} + J_6 . \tag{25}$$

Man überzeugt sich fast unmittelbar, daß hierbei

$$|J_6| < \beta_7 \Omega \tag{26}$$

gilt. Um den Integralausdruck in (25) rechts abzuschätzen, verfahren wir wie bei dem Integral J_1. Wir setzen

$$\begin{aligned} \int_C (u'-u)^3\frac{du'}{\varrho^2\dot{\varrho}^2} &= \int_u^{u+\pi R} (u'-u)^3\Big[\frac{1}{\varrho_1^2\dot{\varrho}^2} - \frac{1}{\bar{\varrho}^2\bar{\dot{\varrho}}^2}\Big]du' \\ &= \int_u^{u+\pi R} (u'-u)^3\frac{(\bar{\varrho}^2-\varrho^2)\bar{\dot{\varrho}}^2 + \varrho^2(\bar{\dot{\varrho}}^2-\dot{\varrho}^2)}{\varrho^2\bar{\varrho}^2\dot{\varrho}^2\bar{\dot{\varrho}}^2}du' = J_7 + J_8 . \end{aligned} \tag{27}$$

Aus den bei der Abschätzung von J_3, J_4, J_5 durchgeführten Betrachtungen folgt ohne weiteres

$$|\bar{\varrho}^2 - \varrho^2| < \beta_8 |u' - u|^3. \tag{28}$$

Aus (28) und der hierzu analogen Ungleichheit

$$|\dot{\bar{\varrho}}^2 - \dot{\varrho}^2| < \beta_8 |u' - u|^3 \tag{29}$$

ergibt sich, wie man sofort sieht,

$$|J_7| + |J_8| < \beta_{10}, \tag{30}$$

mithin

$$\int_C \frac{t_1}{\varrho^2 \dot{\varrho}^2} (\dot{Z} - \dot{Z}') du' < \beta_{11} \Omega. \tag{31}$$

Beachtet man jetzt die Formel (24) sowie die weiteren Beziehungen

$$= 4(R + \dot{Z})(R + \dot{Z}') \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R} - 4(R + Z)(R + Z') \sin^2 \frac{u' + S' - u - S}{2R}$$

$$= 4\{(R + \dot{Z})(R + \dot{Z}') - (R + Z)(R + Z')\} \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R}$$
$$+ 4(R + Z)(R + Z') \left\{ \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R} - \sin^2 \frac{u' + S' - u - S}{2R} \right\}$$

$$= 4\{R(\dot{Z} - Z) + R(\dot{Z}' - Z') + Z'(\dot{Z} - Z) + \dot{Z}(\dot{Z}' - Z')\} \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R}$$
$$+ 4(R + Z)(R + Z') \left\{ \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R} - \sin^2 \frac{u' + S' - u - S}{2R} \right\}$$

$$= 4\left\{ 2R(\dot{Z} - Z) + R(u' - u)\left(\frac{d\tilde{\dot{Z}}}{du} - \frac{d\tilde{Z}}{du}\right) + (\dot{Z} - Z)\left(Z + (u' - u)\frac{d\tilde{Z}}{du}\right) \right.$$
$$\left. + \dot{Z}(\dot{Z} - Z) + (u' - u)\dot{Z}\left(\frac{d\tilde{\dot{Z}}}{du} - \frac{d\tilde{Z}}{du}\right) \right\} \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R}$$

$$+ Z)\left(R + Z + (u' - u)\frac{d\hat{Z}}{du}\right)\left\{ \sin^2 \frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R} - \sin^2 \frac{u' + S' - u - S}{2R} \right\} = t_3 + t_4,$$

so findet man zunächst, daß

$$\int_C \frac{t_3}{\varrho^2 \dot{\varrho}^2} (\dot{Z} - \dot{Z}') du'$$

$$= -4 \frac{d\dot{Z}}{du} \{2R(\dot{Z} - Z) + (Z + \dot{Z})(\dot{Z} - Z)\} \int_C (u' - u) \left(\frac{u' + \dot{S}' - u - \dot{S}}{2R} \right)^2 \frac{du'}{\varrho^2 \dot{\varrho}^2} + J_9$$

gesetzt werden kann, wobei

$$|J_9| < \beta_{12} \Omega \tag{34}$$

gilt. Eine analoge Ungleichheit gilt für das Integral auf der linken Seite der Formel (33), sobald gezeigt ist, daß

$$\left|\int_C (u'-u)\left(\frac{u'+\dot{S}'-u-\dot{S}}{2R}\right)^2 \frac{du'}{\varrho^2\dot{\varrho}^2}\right| < \beta_{13} \tag{35}$$

ist. Es ist nun

$$\left(\frac{u'+\dot{S}'-u-\dot{S}}{2R}\right)^2 = \left(\frac{u'-u}{2R}\right)^2\left(1+\frac{\dot{S}'-\dot{S}}{u'-u}\right)^2, \tag{36}$$

$$\dot{S}'-\dot{S} = (u'-u)\frac{d\dot{S}}{du} + \frac{1}{2}(u'-u)^2\frac{d\check{S}}{du}, \tag{37}$$

demnach gilt (35) falls eine analoge Ungleichheit für das Integral

$$\int_C (u'-u)^3 \frac{du'}{\varrho^2\dot{\varrho}^2} = J_7 + J_8 \tag{38}$$

gilt. Eine solche ist aber vorhin abgeleitet worden.

Es bleibt noch das Integral

$$\int_C \mathfrak{t}_4 \frac{u'-u}{\varrho^2\dot{\varrho}^2}\, du' \tag{39}$$

zu betrachten. Wir finden

$$\sin^2\frac{u'+\dot{S}'-u-\dot{S}}{2R} - \sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R} = \left[\left(\frac{u'+\dot{S}'-u-\dot{S}}{2R}\right)^2 - \left(\frac{u'+S'-u-S}{2R}\right)^2\right] \tag{40}$$

und

$$|\mathfrak{t}_5| < \beta_{14}|u'-u|.$$

Es ist weiter

$$\begin{aligned}&\left(\frac{u'+\dot{S}'-u-\dot{S}}{2R}\right)^2 - \left(\frac{u'+S'-u-S}{2R}\right)^2\\ &= \frac{1}{4R^2}[u'+\dot{S}'-u-\dot{S}+u'+S'-u-S][\dot{S}'-S'-\dot{S}+S]\\ &= \frac{1}{4R^2}\left[(u'-u)\left(2+\frac{dS}{du}+\frac{d\dot{S}}{du}\right)+\frac{1}{2}(u'-u)^2\left(\frac{d\hat{S}}{du}+\frac{d\hat{\dot{S}}}{du}\right)\right]\cdot\\ &\qquad\left[(u'-u)\left(\frac{d\dot{S}}{du}-\frac{dS}{du}\right)+\frac{1}{2}(u'-u)^2\left(\frac{d^2\check{S}}{du^2}-\frac{d^2\check{S}}{du^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{41}$$

Auch jetzt läuft alles, wie man leicht sieht, auf die Untersuchung des Integrals

$$\int_C \frac{(u'-u)^3}{\varrho^2\dot{\varrho}^2}\, du' \tag{42}$$

hinaus.

Damit ist endgültig gezeigt, daß

$$\left|\int_C \Delta_1\, du'\right| < \beta_{15}\,\Omega \tag{43}$$

gilt. Es bleibt nur noch das Integral $\int_C \Delta_3\, du'$ übrig.

Es ist nun

$$\int_C \Delta_3\, du' = 2\int_C (R+Z')\,\frac{\dot\varrho^2-\varrho^2}{\varrho^2\dot\varrho^2}\sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R}\,du'$$

$$+2\int_C \frac{1}{\dot\varrho^2}\left[(R+Z')\sin^2\frac{u'+S'-u-S}{2R}-(R+\dot Z')\sin^2\frac{u'+\dot S'-u-\dot S}{2R}\right]du'$$

$$= J_{10}+J_{11}.$$

Eine Untersuchung der beiden Integrale J_{10} und J_{11} bietet keine chwierigkeiten dar, da die Ausdrücke unter dem Integralzeichen durch-eg stetig sind. Man findet ohne Mühe

15) $$\left|\int_C \Delta_3\, du'\right| < \beta_{16}\,\Omega.$$

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist, wie man leicht sieht, ie im Kapitel I § 3 angegebene Abschätzung des Integralausdruckes — J bewiesen.

Nun der zu J analoge Ausdruck

16) $$L=\int_C\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho}-\frac{\partial}{\partial\tau_0}\log\frac{R}{\varrho_0}\right)du'.$$

Vie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, ist (vgl. die Fig. 3)

17) $$\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{R}{\varrho}=\frac{\sin\chi}{\varrho},$$

emnach

$$\dot L-L=\int_C\left(\frac{\sin\dot\chi}{\dot\varrho}-\frac{\sin\chi}{\varrho}\right)du'=\int_C\left[\frac{R+\dot Z'}{\dot\varrho^2}\sin\left(\frac{u'+\dot S'-u-\dot S}{R}\right)\right.$$

18) $$\left.-\frac{R+Z'}{\varrho^2}\sin\frac{u'+S'-u-S}{R}\right]du'=\int_C\frac{\dot Z'-Z'}{\dot\varrho^2}\sin\left(\frac{u'+\dot S'-u-\dot S}{R}\right)du'$$

$$+\int_C(R+Z')\left\{\frac{1}{\dot\varrho^2}\sin\left(\frac{u'+\dot S'-u-\dot S}{R}\right)-\frac{1}{\varrho^2}\sin\left(\frac{u'+S'-u-S}{R}\right)\right\}du'$$

$$= J_{12}+J_{13}.$$

Der Ausdruck J_{12} ist im wesentlichen so wie J_1 zu behandeln.

Man findet

19) $$|J_{12}|<\beta_{17}\,\Omega.$$

Es ist weiter

$$J_{13}=\int_C\left[R+Z+(u'-u)\frac{d\hat Z}{du}\right]\left\{\frac{1}{\dot\varrho^2}\sin\left(\frac{u'+\dot S'-u-\dot S}{R}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\varrho^2}\sin\left(\frac{u'+S'-u-S}{R}\right)\right\}du'$$

50) $$=\int_C\left[R+Z+(u'-u)\frac{d\hat Z}{du}\right]\left\{\sin\frac{u'+\dot S'-u-\dot S}{R}\left(\frac{1}{\dot\varrho^2}-\frac{1}{\varrho^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varrho^2}\left(\sin\frac{u'+\dot S'-u-\dot S}{R}-\sin\frac{u'+S'-u-S}{R}\right)\right\}du'=J_{14}+J_{15}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß J_{14} im wesentlichen wie $\int_C \Delta_1 du'$ J_{15} wie $\int_C \Delta_2 du'$ zu behandeln sind. Man findet

$$|J_{13}| \leqq |J_{14}| + |J_{15}| < \beta_{18}\,\Omega. \tag{51}$$

Damit ist die im Kapitel I § 3 angegebene Abschätzung des Integralausdruckes $\dot{L} - L$ vollkommen bewiesen. Was schließlich die a. a. O. ausgesprochene Behauptung betrifft, J und L verhalten sich, als Funktionen von u aufgefaßt, stetig, so ließe sich diese ohne Schwierigkeit durch Betrachtungen dartun, die den vorhin durchgeführten parallel verlaufen.

Leipzig, Ende April 1922.

(Eingegangen am 28. April 1922.)

Über die Bianchische Identität für symmetrische Übertragungen.

Von

J. A. Schouten in Delft.

§ 1.

Einleitung.

Bei allen differentialgeometrischen Untersuchungen, bei denen die dritten Differentialquotienten der $g_{\lambda\mu}$ in Betracht kommen, spielt die 1902 von Bianchi angegebene für den ersten kovarianten Differentialquotienten (die „erste Erweiterung") des Riemann-Christoffelschen Affinors gültige zyklische Identität eine wichtige Rolle. Nach einmaliger Überschiebung mit dem Fundamentaltensor kann man aus ihr die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine bestimmte V_n, $n > 3$ konformeuklidisch sei[1]), herleiten. Zweimalige Überschiebung führt zu einer Differentialgleichung, die in der Relativitätstheorie als Impuls-Energiegleichung bekannt ist, und aus der sich unmittelbar der wichtige F. Schursche Satz ableiten läßt, der für den Fall, daß der Riemann-Christoffelsche Affinor für $n > 2$ zu einem Skalar degeneriert ist, aussagt, daß dieser Skalar über V_n konstant ist.

R. Bach hat nun kürzlich[2]) die Bianchische Identität aufs neue bewiesen und zwar nicht für den Fall der gewöhnlichen, sondern für den der Weylschen Differentialgeometrie. Inzwischen hat Verfasser a. a. S.[3])

[1]) Vgl. des Verfassers Arbeit „Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten usw." Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 58–88, weiterhin zitiert K. A.

[2]) Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 110–135, insb. S. 114.

[3]) Über die verschiedenen Arten der Übertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können. Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 56–81, weiterhin zitiert als Ü. D.; Nachtrag Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 168.

gezeigt, daß es noch weitere Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Differentialgeometrie gibt, und diese Verallgemeinerungen, die alle auf bestimmte Annahmen in bezug auf die zugrunde gelegte „Übertragung" beruhen, vollständig aufgezählt. Es erhebt sich daher die Frage, ob es auch für die höheren Übertragungen eine mit der Bianchischen korrespondierende Identität gibt. Im folgenden wird gezeigt, daß dies in der Tat für alle symmetrischen Übertragungen der Fall ist. Es wird sodann durch zweifache Überschiebung eine mit der Impuls-Energiegleichung korrespondierende Gleichung abgeleitet.

Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen aus Ü. D., nur für das Hessenbergsche Symbol der kovarianten Differentiation $\frac{\delta}{\delta x^\mu}$ schreiben wir einfachheitshalber ∇_μ, während wir in Anlehnung an einen Vorschlag von R. Bach die Abkürzung einführen:

$$(1)\quad v_{[\varkappa} w_{\lambda]} = \frac{1}{2}(v_\varkappa w_\lambda - v_\lambda w_\varkappa), \qquad (2)\quad u_{[\varkappa} v_\lambda w_{\mu]} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_\varkappa & u_\lambda & u_\mu \\ v_\varkappa & v_\lambda & v_\mu \\ w_\varkappa & w_\lambda & w_\mu \end{vmatrix}.$$

§ 2.

Die erweiterte Bianchische Identität.

In Ü. D. S. 77 hat Verfasser gezeigt, daß für eine *symmetrische* Übertragung die zweite (oder zyklische) Identität, die für den Riemann-Christoffelschen Affinor $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ gilt, auch für die allgemeinere Krümmungsgröße $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ gültig bleibt. Es ist also (Gleichung (106) a. a. O.)

$$(3)\qquad R_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0.$$

Weiter ist dort (Gleichung (97) S. 76) gezeigt, daß für jede *symmetrische* Übertragung gilt:

$$(4)\qquad 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} v_\lambda = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} v_\nu$$

und weiter (Gleichung (29) S. 64) für jede Übertragung mit $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}$:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \nabla_\mu v^\lambda w_\lambda = (\nabla_\mu v^\lambda) w_\lambda + (\nabla_\mu w_\lambda) v^\lambda - C_\mu v^\lambda w_\lambda \\ &\text{b)}\quad \nabla_\mu v^\varkappa w_\lambda \varepsilon_\varkappa^{\cdot\lambda} = (\nabla_\mu v^\varkappa w_\lambda)\varepsilon_\varkappa^{\cdot\lambda} - C_\mu v^\varkappa w_\lambda \varepsilon_\varkappa^{\cdot\lambda}. \end{aligned}$$

Wir schreiben nun

$$(6)\qquad \nabla_\alpha v_\beta = p_\alpha q_\beta,$$

worin p_α und q_β Bestimmungszahlen idealer Vektoren sind, und folgen genau dem K. A. S. 80 gegebenen Beweis der Bianchischen Identität.

Einerseits ist

$$(7)\qquad 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]}\nabla_\alpha v_\beta = 2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]} p_\alpha q_\beta = R_{\omega\mu\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}\nabla_\gamma v_\beta + R_{\omega\mu\beta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}\nabla_\alpha v_\gamma$$

und also, mit Berücksichtigung von (3):

$$2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha]}v_{\beta} = 0 + p_{[\alpha}R_{\omega\dot{\mu}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}q_{\gamma} = p_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}q_{\gamma}. \tag{8}$$

Andererseits ist, mit Berücksichtigung von (5),

$$2\nabla_{\omega}\nabla_{[\mu}\nabla_{\alpha]}v_{\beta} = \nabla_{\omega}R_{\mu\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}v_{\gamma} = \tag{9}$$

$$= (\nabla_{\omega}R_{\mu\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}})v_{\gamma} + p_{\omega}R_{\mu\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}q_{\gamma} - C_{\omega}R_{\mu\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}v_{\gamma}$$

und also, mit Berücksichtigung von (3):

$$2\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha]}v_{\beta} = (\nabla_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}})v_{\gamma} + p_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}q_{\gamma} - C_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}v_{\gamma}. \tag{10}$$

Vergleichung von (8) und (10) lehrt:

$$\nabla_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} = C_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} \text{ [4]} \tag{11}$$

und für den Spezialfall, wo $C_{\mu} = 0$:

$$\nabla_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} = 0. \tag{12}$$

Dies ist die mit der Bianchischen korrespondierende Identität für eine symmetrische Übertragung mit $C_{\mu} = 0$. Für $C_{\mu} \neq 0$ gilt die kompliziertere Gleichung (11).

Man kann nun (11) eine Form geben, die C_{μ} nicht mehr enthält. Da für $Q_{\mu}{}^{\lambda\nu} = Q_{\mu}g^{\lambda\nu}$ (Ü. D. Gleichungen (25), (26), (51) und (54)):

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} = 2C_{\mu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} \tag{13}$$

$$\nabla_{\mu}\varepsilon_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}} = \nabla_{\mu}g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = C_{\mu}g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = C_{\mu}\varepsilon_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\nu}} \tag{14}$$

dürfen bei Übertragungen dieser Art die Größen $g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}$ und $\varepsilon_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}}$ für $C_{\mu} \neq 0$ nicht unter das Differentiationssymbol gebracht werden, ohne daß ein C_{μ} enthaltendes Korrektionsglied eingeführt wird. Aus der Gleichung (5), die in der Form (5b) selbst ein Beispiel einer solchen Einführung ist und (13) leitet man leicht die Regel ab:

Bei Einführung des Faktors $g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}$ hinter dem Zeichen ∇_{μ} ist für $Q_{\mu}{}^{\lambda\nu} = Q_{\mu}g^{\lambda\nu}$ ein durch Ersetzung von ∇_{μ} durch C_{μ} zu erhaltendes Korrektionsglied mit dem Faktor -2 einzuführen, und dazu für jede einzelne Überschiebung von $g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}$ in sich selbst oder mit einem hinter ∇_{μ} stehenden von ∇_{μ} differentiierend beeinflußten Faktor noch ein ebensolches Glied mit dem Faktor $+1$.

---

[4]) Für den allgemeinen symmetrischen Fall wird diese Gleichung:

$$\nabla_{[\omega}R_{\mu\dot{\alpha}]\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} = \varepsilon_{[\omega}{}^{\varkappa}\varepsilon_{\mu}{}^{\lambda}\varepsilon_{\alpha]}{}^{\nu}C_{\varkappa\dot{\delta}}{}^{\dot{\gamma}}R_{\lambda\nu\dot{\beta}}{}^{\dot{\delta}}. \tag{11a}$$

Es ist für diese Übertragungen also z. B.:

$$\text{a)}\quad (\nabla_\mu v_\varkappa)\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\nu} = \nabla_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\nu} - 2\, C_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\nu},$$

$$\text{b)}\quad (\nabla_\mu v_\varkappa)\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\mu} = \nabla_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\mu} - 2\, C_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\nu},$$

$$\text{c)}\quad (\nabla_\mu v_\varkappa)\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\varkappa} = \nabla_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\varkappa} - C_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\beta\varkappa},$$

$$(15)\quad \text{d)}\quad (\nabla_\mu v_\varkappa)\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\mu\varkappa} = \nabla_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\mu\varkappa} - C_\mu v_\varkappa\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\mu\varkappa},$$

$$\text{e)}\quad (\nabla_\mu v_\varkappa)\, g_{\lambda\alpha}\, g^{\alpha\nu} = (\nabla_\mu v_\varkappa)\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\nu} = \nabla_\mu v_\varkappa\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\nu} - C_\mu v_\varkappa\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\nu},$$

$$\text{f)}\quad \nabla_\lambda v_\varkappa = (\nabla_\mu v_\varkappa)\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\mu} = \nabla_\mu v_\varkappa\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\mu} - C_\mu v_\varkappa\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\mu} = \nabla_\mu v_\varkappa\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\mu} - C_\lambda v_\varkappa,$$

$$\text{g)}\quad \nabla_\mu v_\lambda = (\nabla_\mu v_\varkappa)\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\varkappa} = \nabla_\mu v_\varkappa\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\varkappa} = \nabla_\mu v_\lambda.$$

Die Gleichungen f) und g) gelten auch für $Q_\mu^{\cdot\lambda\mu} + Q_\mu\, g^{\lambda\nu}$.

Durch Anwendung von (15f) auf (11) entsteht:

$$(16)\qquad \nabla_\omega\, \varepsilon_{[\nu}^{\cdot\,\omega}\, R_{\mu\dot\alpha]\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma} - 2\, \nabla_{[\nu} R_{\mu\dot\alpha]\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma} = 0$$

und damit ist eine, für alle symmetrischen Übertragungen mit $C_{\mu\dot\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu} = C_\mu\, \varepsilon_\lambda^{\cdot\,\nu}$ gültige, C_μ nicht enthaltende Form der Identität gefunden.

§ 3.

Erste Überschiebung der erweiterten Bianchischen Identität.

In die gefundene Identität (16) führen wir den Faktor $\varepsilon_\gamma^{\cdot\,\nu}$ unter das Differentiationssymbol ein. Sodann (oder auch aus (11)) entsteht:

$$\begin{aligned}(17)\qquad & \nabla_\omega\, \varepsilon_\nu^{\cdot\,\omega}\, R_{\mu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma}\, \varepsilon_\gamma^{\cdot\,\nu} - C_\omega\, \varepsilon_\nu^{\cdot\,\omega}\, R_{\mu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma}\, \varepsilon_\gamma^{\cdot\,\nu} + \\ & + \nabla_\omega\, \varepsilon_\mu^{\cdot\,\omega}\, R_{\dot\alpha\nu\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma}\, \varepsilon_\gamma^{\cdot\,\nu} - C_\omega\, \varepsilon_\mu^{\cdot\,\omega}\, R_{\dot\alpha\nu\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma}\, \varepsilon_\gamma^{\cdot\,\nu} + \\ & + \nabla_\omega\, \varepsilon_\alpha^{\cdot\,\omega}\, R_{\nu\dot\mu\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma}\, \varepsilon_\gamma^{\cdot\,\nu} - C_\omega\, \varepsilon_\alpha^{\cdot\,\omega}\, R_{\nu\dot\mu\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\gamma}\, \varepsilon_\gamma^{\cdot\,\nu} = \\ & = \nabla_\omega R_{\mu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\omega} - C_\omega R_{\mu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\omega} - \nabla_\mu R_{\nu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} + \nabla_\alpha R_{\nu\dot\mu\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = 0.\end{aligned}$$

Setzen wir:

$$(18)\qquad R_{\alpha\beta} = R_{\nu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu},$$

so ist also:

$$(19)\qquad \nabla_\omega R_{\mu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\omega} - C_\omega R_{\mu\dot\alpha\dot\beta}^{\cdot\cdot\cdot\,\omega} - 2\, \nabla_{[\mu} R_{\alpha]\beta} = 0.$$

§ 4.

Zweite Überschiebung der erweiterten Bianchischen Identität.

In (19) führen wir jetzt den Faktor $g_{\varkappa\lambda}\, g^{\alpha\beta}$ unter das Differentiationssymbol ein. Es sei $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu} = Q_\mu\, g^{\lambda\nu}$. Dann entsteht:

$$\begin{aligned}(20)\qquad & \nabla_\omega R_{\mu\dot\alpha}^{\cdot\cdot\,\alpha\omega}\, g_{\varkappa\lambda} - C_\omega\, R_{\mu\dot\alpha}^{\cdot\cdot\,\alpha\omega}\, g_{\varkappa\lambda} - \nabla_\mu R_{\dot\alpha}^{\cdot\,\alpha}\, g_{\varkappa\lambda} + \nabla_\alpha R_{\mu\beta}\, g^{\alpha\beta}\, g_{\varkappa\lambda} \\ & - C_\alpha R_{\mu\beta}\, g^{\alpha\beta}\, g_{\varkappa\lambda} = 0.\end{aligned}$$

Nun ist:

$$(21)\qquad \nabla_\omega R_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\alpha\omega} g_{\varkappa\lambda} - C_\omega R_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\alpha\omega} g_{\varkappa\lambda} =$$
$$= \nabla_\omega g^{\omega\nu} R_{\mu\alpha\cdot\nu}^{\cdot\cdot\alpha} g_{\varkappa\lambda} - C_\omega g^{\omega\nu} R_{\mu\alpha\cdot\nu}^{\cdot\cdot\alpha} g_{\varkappa\lambda} = g_{\varkappa\lambda} g^{\omega\nu} \nabla_\omega R_{\mu\alpha\cdot\nu}^{\cdot\cdot\alpha};$$

$$(22)\qquad \nabla_\mu R_\alpha^{\cdot\alpha} g_{\varkappa\lambda} = \nabla_\omega g^{\omega\nu} g_{\nu\mu} R_\alpha^{\cdot\alpha} g_{\varkappa\lambda} - C_\mu g^{\omega\nu} g_{\nu\mu} R_\alpha^{\cdot\alpha} g_{\varkappa\lambda} =$$
$$= g_{\varkappa\lambda} g^{\omega\nu} \nabla_\omega R_\alpha^{\cdot\alpha} g_{\mu\nu};$$

$$(23)\qquad \nabla_\alpha R_{\mu\beta} g^{\alpha\beta} g_{\varkappa\lambda} - C_\alpha R_{\mu\beta} g^{\alpha\beta} g_{\varkappa\lambda} = g_{\varkappa\lambda} g^{\omega\nu} \nabla_\omega R_{\mu\nu},$$

so daß (20) geschrieben werden kann:

$$(24)\qquad g^{\omega\nu} \nabla_\omega (R_{\mu\alpha\cdot\nu}^{\cdot\cdot\alpha} - R_\alpha^{\cdot\alpha} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}) = 0.$$

Für den Zusammenhang IVc und $n = 4$ (Weylsche Geometrie) weist man leicht nach, daß

$$(25)\qquad R_{\mu\alpha\cdot\nu}^{\cdot\cdot\alpha} = \frac{1}{2}(R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu}).\ ^{5})$$

Zerlegt man nun $R_{\mu\nu}$ in einen symmetrischen und einen alternierenden Teil:

$$(26)\qquad R_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}; \qquad F_{\mu\nu} = R_{[\mu\nu]},$$

so geht (24) über in:

$$(27)\qquad g^{\omega\nu} \nabla_\omega (2 S_{\mu\nu} - R_\alpha^{\cdot\alpha} g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) = 0.\ ^{6})$$

Ist $F_{\mu\nu} = 0$, so läßt sich $g_{\lambda\mu}$ so wählen, daß $Q_\mu = 0$, und somit der Fall VIc (gewöhnliche Differentialgeometrie) eintritt. Sodann wird

$$(28)\qquad \begin{gathered} R_\alpha^{\cdot\alpha} = K \\ S_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} \\ R_\alpha^{\cdot\alpha} g_{\mu\nu} - 2 S_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}, \end{gathered}$$

während $g^{\omega\nu}$ unter das Differentiationssymbol gebracht werden darf, da $\nabla_\lambda g^{\omega\nu} = 0$. (27) geht dann über in

$$(29)\qquad \nabla_\mu G_{\cdot\nu}^{\mu} = 0,$$

und dies ist für $n = 4$ die bekannte Impuls-Energiegleichung.

---

[5]) R. Bach: a. a. O. S. 118.

[6]) Bei R. Bach tritt diese Gleichung a. a. O. S. 119 in einer etwas anderen $\sqrt{g}$ enthaltenden Form auf.

(Eingegangen am 3. Mai 1922.)

Über die Maximalzahl der Doppelpunkte bei ebenen Polygonen von gerader Seitenzahl.

Von

Ernst Steinitz in Kiel.

Die folgenden Betrachtungen sollen eine Bemerkung in meinem Encyklopädieartikel „Polyeder und Raumeinteilungen", die sich auf die Doppelpunkte ebener Polygone bezieht, näher begründen.

Die Ecken eines ebenen n-Ecks seien fortlaufend mit A_i oder auch durch bloße Angabe des Index i, seine Kanten (Seiten) mit $a_i = A_i A_{i+1}$ bezeichnet. Dabei soll i alle ganzen Zahlen durchlaufen, indem festgesetzt wird, daß für $i \equiv k \bmod n$ $A_i = A_k$ ist. Zu jeder Kante a_i gibt es zwei *benachbarte*: a_{i-1} und a_{i+1}; jeder Schnittpunkt von a_i mit einer der $n-3$ übrigen Kanten zählt als ein *Doppelpunkt.* Die Anzahl der Doppelpunkte — sie sei ϑ genannt — ist also gleichbedeutend mit der Anzahl der sich schneidenden Paare nicht benachbarter Kanten, und ein Punkt, durch den r nicht benachbarte Kanten hindurchlaufen, zählt für $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkte. Um jede Unbestimmtheit bei der Berechnung von ϑ zu vermeiden, sollen ein für allemal solche Fälle ausgeschlossen werden, in denen eine Kante a_i noch andere Ecken außer A_i und A_{i+1} enthält. Damit ist zugleich ein Zusammenfallen von Ecken oder Aufeinanderfallen von Kanten ausgeschlossen.

Die Frage nach den möglichen Werten von ϑ bei gegebenem n ist wohl erstmalig von R. Baltzer[1]) behandelt worden. Doch enthält sein kurzer Aufsatz mehrere Irrtümer. Erst G. Brunel[2]) hat diese beseitigt und die Frage vollständig beantwortet; aber die Begründung seiner Angaben ist mangelhaft. Es läßt sich leicht zeigen, daß mit einem Wert von ϑ zugleich auch alle diejenigen möglich sein müssen, die um eine

[1]) Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig (1885) S. 1.

[2]) Mém. de la soc. d. sc. phys. et nat. de Bordeaux (4) 4 (1891), S. 273.

gerade Zahl kleiner sind. Hiernach reduziert sich die Aufgabe auf die Bestimmung der *größten* Werte von ϑ, des größten geraden und des größten ungeraden. In jedem Falle stellt die Zahl $\frac{n(n-3)}{2}$ eine obere Schranke für ϑ dar; denn dies ist die Anzahl aller Paare nicht benachbarter Kanten.

Ist nun zunächst n eine ungerade Zahl, $n = 2k+1$, so erkennt man leicht, daß die angegebene obere Schranke $\frac{n(n-3)}{2}$ auch wirklich erreicht wird, also n-Ecke existieren, bei denen nicht benachbarte Kanten sich stets schneiden. Eine besonders übersichtliche Figur dieser Art findet sich unter den *regulären Sternpolygonen*. Man erhält sie, indem man einen Kreis in $n = 2k+1$ gleiche Teile teilt und immer je zwei Teilpunkte verbindet, die zwischen sich k dieser Teile fassen. Die Fig. 1

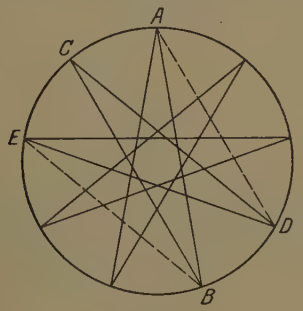

Fig. 1.

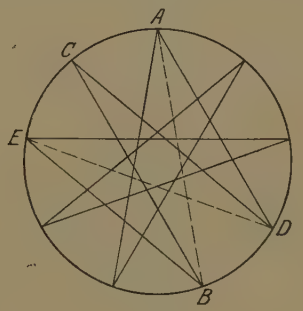

Fig. 2.

stellt den Fall $n = 9$ dar. In allgemeinster Weise kann man ein n-Eck mit $\frac{n(n-3)}{2}$ Doppelpunkten konstruieren, indem man beim Zeichnen des Streckenzuges $a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ es so einrichtet, daß jede neu hinzukommende Strecke alle schon vorhandenen schneidet (*Baltzer*). Die Durchführung dieses Verfahrens läßt auch leicht erkennen, daß ein n-Eck mit $\frac{n(n-3)}{2} - 1$ Doppelpunkten nicht möglich ist, daß somit für diejenigen Werte von ϑ, die sich von $\frac{n(n-3)}{2}$ um eine ungerade Zahl unterscheiden, die Zahl $\frac{n(n-3)}{2} - 3$ eine obere Schranke darstellt. Daß diese erreichbar ist, hat erst Brunel gezeigt. Von dem regulären n-Eck mit $\frac{n(n-3)}{2}$ Doppelpunkten ausgehend, kann man so verfahren: Sind $ABCDE$ fünf aufeinander folgende Ecken (Fig. 1), so lasse man die Kanten AB und DE fort, was einen Verlust der auf diesen Kanten gelegenen $2(n-3)-1$ Doppelpunkte und einen Zerfall der zurückbleibenden Figur in zwei Züge von 2 bzw. $n-4$ Kanten zur Folge hat. Fügt man jetzt die (in Fig. 1 gestrichelten) einander nicht schneidenden Strecken AD und EB hinzu,

so hat man wieder ein kontinuierliches n-Eck (Fig. 2) und auf jeder der neu hinzugekommenen Kanten $n-5$ Doppelpunkte, so daß für dieses n-Eck

$$\vartheta = \frac{n(n-3)}{2} - (2(n-3)-1) + 2(n-5) = \frac{n(n-3)}{2} - 3$$

wird. Alles in allem ergeben sich also als mögliche Werte von ϑ alle Zahlen von 0 bis $\frac{n(n-3)}{2}$ mit Ausnahme von $\frac{n(n-3)}{2} - 1$.

Es sei jetzt n eine gerade Zahl, $n = 2k$. Hier liegt die Sache nicht ganz so einfach. Versucht man auch hier zur Maximalzahl von ϑ zu gelangen, indem man den Zug $a_0, a_1 \ldots$ so zeichnet, daß jede hinzutretende Strecke die schon vorhandenen schneidet, so zeigt sich, nachdem man bis zur $(n-1)$-ten Strecke a_{n-2} gelangt ist, daß Anfangs- und Endpunkt dieses Zuges bezüglich jeder der Geraden, in denen die Kanten $a_1, \ldots, a_{n-3}$ enthalten sind, notwendig auf derselben Seite gelegen sein müssen. Die letzte Kante a_{n-1} kann also keinen Doppelpunkt mehr enthalten, und man erhält für das so konstruierte Polygon

$$\vartheta = 1 + 2 + \ldots + (n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

Baltzer hielt diesen Wert für das Maximum von ϑ bei geradem n. Er ist es schon für $n = 6$ nicht mehr; denn wie Fig. 3 zeigt, gibt es ein Sechseck mit 7 Doppelpunkten. Von dieser Figur ausgehend erkannte Brunel allgemein die Möglichkeit eines n-Ecks mit $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ Doppelpunkten. Er bemerkte auch, daß ein n-Eck mit $\frac{n(n-4)}{2}$ Doppelpunkten existiert. Für den komplizierteren Fall $n = 4r + 2$ ist jedoch die Konstruktion eines solchen erst von M. Brückner in seinem bekannten Buche *Vielecke und Vielflache* (Leipzig 1909, S. 12) gegeben worden. Im Falle $n = 4r$ liefern schon die regulären Sternpolygone ein einfaches Beispiel. Man braucht nur einen Kreis in $n = 2k$ gleiche Teile zu teilen und je zwei Teilpunkte zu verbinden, die $k-1$ Teile zwischen sich fassen (Fig. 4 für $n = 12$). In dem so entstehenden n-Eck entspricht jeder Ecke A eine ihr diametral gegenüberliegende A'. Die Strecke (der Durchmesser) AA' wird von allen $n-4$ Kanten, die außer den durch A und A' gehenden noch vorhanden sind, geschnitten. Jeder Kante AB entspricht eine zweite, die die gegenüberliegenden Ecken A', B' verbindet. Sie ist die einzige unter den nicht zu AB benachbarten Kanten, die AB nicht schneidet. Auf jeder Kante hat man also $n-4$ und insgesamt $\frac{n(n-4)}{2}$

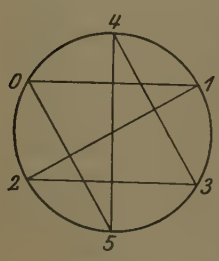

Fig. 3.

Doppelpunkte. — Alle diese Angaben gelten zwar auch im Falle $n = 2k = 4r + 2$, doch ist alsdann $k - 1$ nicht relativ prim zu $n = 2k$, und das n-Eck nicht mehr kontinuierlich; es zerfällt in zwei k-Ecke (s. Fig. 5, wo $n = 14$). Aber in beiden Fällen kann man in gleicher Weise aus dem n-Eck mit $\frac{n(n-4)}{2}$ ein *kontinuierliches* mit $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ Doppelpunkten herleiten. Es seien AB und $A'B'$ zwei parallele Seiten

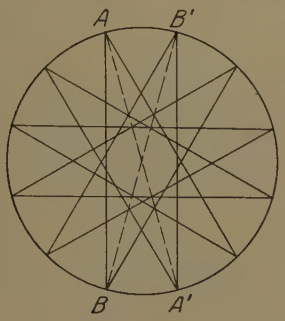

Fig. 4.

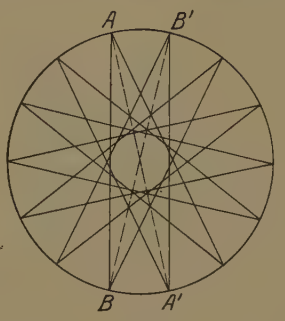

Fig. 5.

des n-Ecks in derselben Bezeichnung wie oben (Fig. 4 u. 5). Durchläuft man im Falle $n = 4r$ das Polygon in dem Sinne, daß man von A ausgehend zunächst nach B gelangt, so wird die parallele Kante in der Richtung $A'B'$ durchlaufen; im Falle $n = 2k = 4r + 2$ aber gehört die eine der beiden Kanten dem einen, die andere dem andern k-Eck an. In beiden Fällen wird nach Wegnahme der Kanten AB, $A'B'$ die zurückbleibende Figur in zwei Streckenzüge zerfallen; von diesen wird im ersten Falle der eine in den Punkten A und B', der andere in A' und B, im zweiten Falle der eine in A und B, der andere in A' und B' endigen. Fügt man jetzt die Strecken AA' und BB' als neue Kanten hinzu, so hat man in beiden Fällen ein *kontinuierliches* n-Eck. Dabei bewirkt der Fortfall der Kanten AB, $A'B'$ einen Verlust von $2(n-4)$ Doppelpunkten, während durch die beiden neu eingeführten einander schneidenden Kanten $2(n-4)+1$ Doppelpunkte hinzukommen, so daß ihre Zahl jetzt $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ ist.

Die Geraden, welche die von AA' und BB' gebildeten Winkel halbieren, sind Symmetrieachsen des Polygons. In unseren Figuren ist die eine, welche durch die Mitten der kleinen Bögen AB', $A'B$ geht, vertikal, die andere horizontal. Diese geht im Falle $n = 4r + 2$ durch zwei Ecken CD (Fig. 7). Wenn man das n-Eck mit der Kante AA' beginnend durchläuft, so treten, wie aus seiner Entstehung zu ersehen ist, im Falle $n = 4r$ die Ecken in der Folge $AA' \ldots BB' \ldots$, im Falle $n = 4r + 2$

in der Folge $AA' \ldots B'B \ldots$ auf. Da nun bei der Spiegelung an der horizontalen Achse AA' mit BB', bei der Spiegelung an der vertikalen aber mit $B'B$ vertauscht wird, so folgt: Im Falle $n = 4r$ bleibt bei der Spiegelung an der horizontalen Achse der Umlaufssinn erhalten, während er sich bei der Spiegelung an der vertikalen Achse umkehrt; im Falle $n = 4r + 2$ ist es gerade umgekehrt.

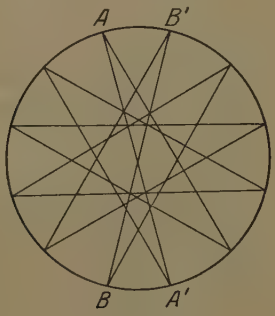

Fig. 6.

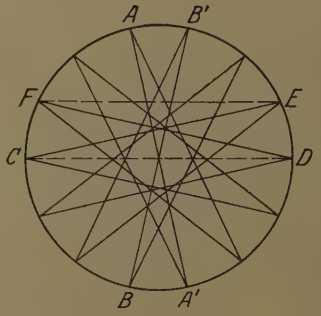

Fig. 7.

Wir verfolgen jetzt den Fall $n = 4r + 2$ weiter (Fig. 7). Von den in der horizontalen Achse gelegenen Ecken C, D gehen, auf derselben Seite dieser Achse gelegen, die Kanten CE und DF aus; dabei sind die Bögen CF, DE gleich dem n-ten Teil der Kreisperipherie. Bei der den Umlaufssinn erhaltenden Spiegelung an der vertikalen Achse vertauschen sich CE und DF. Man kann daher das Polygon so durchlaufen, daß die Ecken in der Folge $CE \ldots DF \ldots$ auftreten. Daraus folgt weiter, daß man wieder zu einem *kontinuierlichen* n-Eck gelangt, wenn man die Kanten CE, DF fortläßt und durch CD und EF ersetzt (Fig. 8). Hierbei werden zuerst $2(n-4)-1$ Doppelpunkte verloren, sodann $(n-4)+(n-6)$ gewonnen; ihre Anzahl ist also jetzt $\frac{n(n-4)}{2}$. Nachdem so für jeden geraden Wert n die Existenz (kontinuierlicher) n-Ecke sowohl mit $\frac{n(n-4)}{2}+1$ als auch mit $\frac{n(n-4)}{2}$ Doppelpunkten erwiesen ist, kann, wie oben bemerkt wurde, leicht gezeigt werden, daß ϑ jeden Wert von 0 bis $\frac{n(n-4)}{2}+1$ anzunehmen vermag.

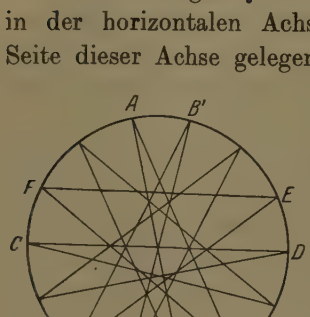

Fig. 8.

Hiermit ist aber die Frage nach den möglichen Werten von ϑ bei geradem n noch nicht endgültig entschieden. *Denn es ist in keiner Weise gezeigt, daß ϑ nicht noch größere Werte annehmen kann.* Brunel

hat dies auch nicht direkt behauptet: Erst bei Brückner wird $\frac{n(n-4)}{2}+1$ ausdrücklich als *Maximalzahl* der Doppelpunkte bezeichnet; doch fehlt auch hier jede Begründung. Eine solche soll jetzt gegeben werden.

Wir bezeichnen mit $\bar{a}_i$ die Gerade, in welcher die n-Eckskante a_i gelegen ist. a_i heiße „*Wendekante*", wenn die beiden Nachbarkanten a_{i-1} und a_{i+1} zu verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{a}_i$ liegen, „*ausgezeichnete Kante*", wenn alle $n-3$ nicht benachbarten Kanten a_i schneiden. n wird als gerade vorausgesetzt. Dann ist zunächst klar, daß jede ausgezeichnete Kante a_i auch Wendekante sein muß. Denn der Streckenzug $a_{i+2}\, a_{i+3} \cdots a_{i+n-2} = a_{i-2}$ umfaßt $n-3$, also eine ungerade Anzahl von Kanten, die sämtlich a_i schneiden; seine Endpunkte A_{i+2}, A_{i-1}, die zugleich den Streckenzug a_{i-1}, a_i, a_{i+1} begrenzen, liegen also zu verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{a}_i$. Ist a_i Wendekante, so können a_{i-1} und a_{i+1} einander nicht schneiden, und es kann also weder a_{i-1} noch a_{i+1} eine ausgezeichnete Kante sein. Daher können zwei benachbarte Kanten nicht beide zugleich ausgezeichnete Kanten sein.

Wir ordnen nun jeder Wendekante a_i einen bestimmten Drehungssinn zu, indem wir sie um einen ihrer inneren Punkte, etwa den Mittelpunkt, in der Weise sich drehend denken, daß jeder ihrer Endpunkte A_i, A_{i+1} nach der Seite sich bewegt, nach welcher die von ihm ausgehende Nachbarkante a_{i-1} bzw. a_{i+1} hinweist. Die beiden Wendekanten 1 2 und 4 5 in Fig. 3 zeigen verschiedenen Drehungssinn, und dasselbe gilt für die Wendekanten AA' und BB' in den Figuren 6 und 7.

Es liege nun irgendein Polygon von gerader Kantenzahl n vor, von dem nur vorausgesetzt werde, daß es mehrere ausgezeichnete Kanten enthält. Wir greifen dann aus diesen irgend zwei: a_i und a_k heraus, $(0 \leqq i < k \leqq n)$. a_i und a_k sind nicht benachbart, müssen sich also schneiden. Werden die Kanten a_i, a_k fortgelassen, so bleiben zwei Kantenzüge zurück, von denen, wie wir zunächst annehmen wollen, jeder wenigstens zwei Kanten umfassen soll. Dann sind die sechs Kanten a_{i-1}, a_i, a_{i+1}; a_{k-1}, a_k, a_{k+1} sämtlich voneinander verschieden. Die Endpunkte A_{i-1}, A_{i+2} des Zuges a_{i-1}, a_i, a_{i+1} liegen zu verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{a}_i$, weil a_i Wendekante ist; sie liegen zu verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{a}_k$, weil a_k von a_{i-1}, a_i und a_{i+1} geschnitten wird. Durch die Geraden $\bar{a}_i$ und $\bar{a}_k$ wird die Ebene in vier Quadranten zerlegt, die wir in zyklischer Folge mit I, II, III, IV bezeichnen und zwar so, daß A_{i-1} in I fällt und I und II auf derselben Seite der Geraden $\bar{a}_i$ gelegen sind. A_{i+2} liegt dann in III (Fig. 9). Wir betrachten jetzt den Zug $A_{i+2} A_{i+3} \cdots A_{k-1}$. Im Falle $k-i=3$ reduziert er sich auf den einzigen Punkt $A_{i+2} = A_{k-1}$, andernfalls schneiden alle Kanten des Zuges

sowohl a_i als a_k und liegen daher die Ecken abwechseln in III und I. In jedem Falle gilt: A_{k-1} *liegt in* I *oder* III, *je nachdem* $k-i$ *gerade oder ungerade ist.* Bezeichnen wir also mit U den Endpunkt der Kante a_k, welcher auf der Begrenzung der Quadranten I, II liegt, den andern mit V, so muß, weil A_{k-1} und A_k zu verschiedenen Seiten von $\bar{a}_i$ liegen, bei geradem $k-i$ $V=A_k$, $U=A_{k+1}$, bei ungeradem $k-i$ $U=A_k$, $V=A_{k+1}$ werden. In jedem Falle muß diejenige der beiden Kanten a_{k-1}, a_{k+1}, welche von U ausgeht, in III, die, welche von V ausgeht, in I endigen, da beide Kanten die Kante a_i schneiden und zu verschiedenen Seiten von $\bar{a}_k$ liegen. Ist S der Schnittpunkt von a_i und a_k, so gehören SA_i und SU der Begrenzung von II an, und in diesen Quadranten führt sowohl die von A_i ausgehende Kante a_{i-1} als auch die von U ausgehende Kante a_{k-1} oder a_{k+1} zunächst hinein. *Hieraus ersieht man, daß die beiden Wendekanten* a_i, a_k *verschiedenen Drehungssinn haben.* In dem bisher ausgeschlossenen Fall, daß einer der beiden Kantenzüge, welche nach Weglassung von a_i und a_k zurückbleiben, sich auf eine einzige Kante reduziert, gilt aber, wie man sofort sieht, genau dasselbe. Es müssen also irgend zwei ausgezeichnete Kanten allemal entgegengesetzten Drehungssinn haben. Daraus folgt:

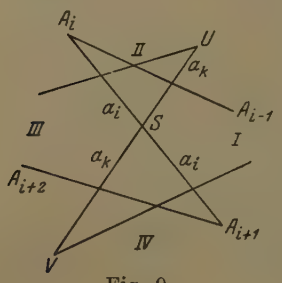

Fig. 9.

Ein Polygon von gerader Kantenzahl n *kann höchstens zwei ausgezeichnete Kanten haben, nämlich je eine für jeden Drehungssinn.*

Hieraus ergibt sich aber auch sofort, was wir zeigen wollten. Denn günstigsten Falles gibt es zwei Kanten mit je $n-3$ Doppelpunkten; bei jeder der übrigen Kanten kann die Zahl der Doppelpunkte höchstens $n-4$ sein, so daß sich

$$\frac{2(n-3)+(n-2)(n-4)}{2}=\frac{n^2-4n+2}{2}=\frac{n(n-4)}{2}+1$$

als obere Schranke für ϑ ergibt.

Wir wollen nun die Polygone, für welche ϑ seinen Maximalwert $\frac{n(n-4)}{2}+1$ erreicht, noch etwas näher untersuchen. Es wird sich zeigen, daß sie alle im wesentlichen dieselbe Struktur haben[3]). Aus unseren bisherigen Betrachtungen ergibt sich bereits, daß die Maximalzahl nur so

[3]) Dies ist schon bei den Polygonen mit $\vartheta=\frac{n(n-4)}{2}$ nicht mehr der Fall. Hier ergeben sich, wie man leicht sieht, verschiedene Möglichkeiten in der Verteilung der Doppelpunkte; und die Zahl dieser Möglichkeiten wächst mit n unbegrenzt.

erreicht werden kann, daß zwei ausgezeichnete Kanten vorhanden sind, während zu jeder der übrigen Kanten a genau eine nicht benachbarte Kante a' gehört, die sie nicht schneidet. Wir nennen a und a' *konjugierte Kanten* und wollen jede der beiden ausgezeichneten Kanten als *zu sich selbst konjugiert* bezeichnen, so daß also jede Kante ihre konjugierte hat. Wir setzen $n = 2k$ und wählen die Anordnung so, daß a_0 ausgezeichnete Kante wird. Dann wollen wir zeigen:

Es sind allemal a_r und a_{-r} konjugierte Kanten (also $a_{-k} = a_k$ die zweite ausgezeichnete Kante).

Ferner soll gezeigt werden, *daß jede nicht ausgezeichnete Kante a_r nicht nur mit a_{-r}, sondern auch mit der Geraden $\bar{a}_{-r}$ keinen Punkt gemein hat.* — Zunächst sieht man, daß die Kanten a_1 und a_{-1} konjugiert sind; denn sie sind nicht benachbart und schneiden sich nicht, weil a_0 Wendekante ist. Da ferner a_0 und a_2 sich schneiden, so liegen sie, und somit auch ihre Endpunkte A_0, A_3 auf derselben Seite der Geraden $\bar{a}_1$. Ebenso liegen die Endpunkte A_3, A_{-1} des Kantenzuges $a_3 a_4 \ldots a_{n-2} = a_{-2}$ auf derselben Seite der Geraden $\bar{a}_1$. Denn die Anzahl $n-4$ der Kanten dieses Zuges ist gerade und, da die zu a_1 konjugierte Kante a_{-1}, sowie die zu a_1 benachbarten Kanten a_0, a_2 nicht vorkommen, so schneiden sie sämtlich a_1. Hieraus folgt, daß A_{-1} und A_0 auf derselben Seite von $\bar{a}_1$ liegen, die Kante a_{-1}, also die Gerade $\bar{a}_1$ nicht schneidet. Ganz ebenso ergibt sich, daß $\bar{a}_{-1}$ von a_1 nicht geschnitten werden kann. — Nachdem so unsere Behauptungen für $r = \pm 1$ bewiesen sind, wenden wir die vollständige Induktion an. Es sei $1 < r < k = \frac{n}{2}$, und es sei für $0 < s < r$ bewiesen, daß a_s und a_{-s} konjugiert sind und weder $\bar{a}_s$ von a_{-s} noch $\bar{a}_{-s}$ von a_s geschnitten wird. Dann ist dasselbe für $s = r$ nachzuweisen. Nun sind die Kanten des Zuges

$$a_{-r+1}\, a_{-r+2} \ldots a_0 \ldots a_{r-2}\, a_{r-1}$$

paarweise (a_0 zu sich selbst) konjugiert. a_r kommt nicht vor, also auch die zu a_r konjugierte Kante nicht. Lassen wir a_{r-1} fort, so enthält der zurückbleibende Zug

$$a_{-r+1}\, a_{r-2} \ldots a_{r-2}$$

auch keine zu a_r benachbarte Kante, und da die Zahl seiner Kanten gerade ist und alle a_r schneiden, so liegen seine Endpunkte A_{-r+1} und A_{r-1} auf derselben Seite der Geraden $\bar{a}_r$. Die beiden von A_r ausgehenden Strahlen (Strahl = Halbgerade), in denen die Kanten a_{r-1} und a_r gelegen sind, bestimmen einen Winkel $\mathfrak{W}$ (Fig. 10). Da die Kante a_{-r+1} zu a_{r-1} konjugiert ist, so schneidet sie a_{r-1} nicht, wohl aber a_r. Daher muß einer der beiden Endpunkte von a_{-r+1} innerhalb $\mathfrak{W}$ liegen; und zwar

muß dies der Endpunkt A_{-r+1} sein; denn dieser liegt, wie wir sahen, auf derselben Seite der Geraden $\bar{a}_r$ wie der Endpunkt A_{r-1} der Kante a_{r-1}. Die andere von A_{-r+1} ausgehende Kante a_{-r} muß a_{r-1} schneiden, kann daher nicht auch a_r schneiden. Daraus folgt: *a_r und a_{-r} sind konjugiert.* Der in den Ecken A_{r+2}, A_{-r} endigende Kantenzug

$$a_{r+2}\, a_{r+3} \ldots a_{n-r-1} = a_{-r-1}$$

umfaßt $n-2r-2$, also eine gerade Zahl von Kanten (im Falle $r = k-1 = \frac{n}{2}-1$ reduziert er sich auf den Punkt $A_{r+2} = A_{k+1} = A_{-r}$). Alle diese schneiden a_r, weil weder die konjugierte Kante a_{-r}, noch eine der beiden Nachbarkanten vorkommt. Daher liegen A_{r+2} und A_{-r} auf derselben Seite der Geraden $\bar{a}_r$. Dasselbe gilt von A_{r-1} und A_{r+2}, weil a_{r-1} und a_{r+1} sich schneiden, und, wie früher gezeigt wurde, von A_{r-1} und A_{-r+1}. Es liegen also die Endpunkte A_{-r} und A_{-r+1} der Kante a_{-r} auf derselben Seite von $\bar{a}_r$. Somit wird $\bar{a}_r$ von a_{-r} nicht geschnitten. Ebenso zeigt man, daß $\bar{a}_{-r}$ von a_r nicht geschnitten wird.

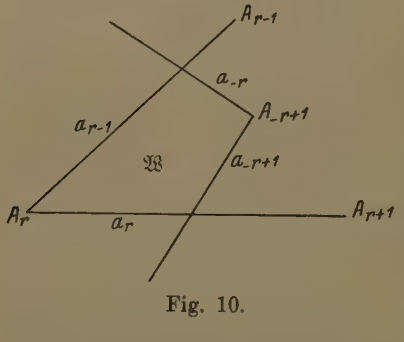

Fig. 10.

Nachdem so der Beweis für $r = 1, 2, \ldots, k-1$ geführt ist, folgt, daß die noch übrig bleibende Kante $a_k = a_{-k}$ die zu sich selbst konjugierte zweite ausgezeichnete Kante sein muß.

Die beiden ausgezeichneten Kanten a_0, a_k sind zugleich die einzigen Wendekanten. Denn wenn a_r Wendekante ist, so schneiden a_{r-1} und a_{r+1} sich nicht, müssen also konjugiert sein. Daraus folgt $r-1 \equiv -(r+1)$, $2r \equiv 0 \mod n = 2k$, also $r \equiv 0$ oder $\equiv k$. — Die zu den von irgendeiner Ecke A_r ausgehenden Kanten a_{r-1}, a_r konjugierten Kanten a_{-r+1}, a_{-r} haben die Ecke A_{-r+1} gemein; wir bezeichnen nun auch die Ecken A_r, A_{-r+1} als *konjugiert.*

Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Wenn bei einem nicht geschlossenen Streckenzuge

$$c_{-m}\, c_{-m+1} \ldots c_0 \ldots c_{m-1}\, c_m$$

der Schnittpunkt der Geraden $\bar{c}_r$, $\bar{c}_{-r}$ $(r = 1 \ldots m)$, in denen die Strecken c_r, c_{-r} liegen, außerhalb dieser Strecken fällt, während sonst je zwei nicht benachbarte Strecken sich schneiden, so erhält man nach Hinzufügung der Verbindungsstrecke s der Endpunkte des Zuges ein $(2m+2)$-Eck, in welchem die Zahl der Doppelpunkte den Maximalwert $\frac{(2m+2)(2m-2)}{2}+1$ erreicht.

Offenbar hat man nur zu zeigen, daß die Strecke s von jeder der Strecken $c_{-m+1}, \ldots c_0, \ldots c_{m-1}$ geschnitten wird. Nun erhellt aus unseren Voraussetzungen, daß c_0 die einzige Wendekante des gegebenen Zuges ist[4]). Die Endpunkte des Zuges $c_{-1}\, c_0\, c_1$ liegen zu verschiedenen Seiten der Geraden $\bar{c}_0$, jede der $2m-2$ übrigen Strecken $c_{-m}, \ldots c_{-2}, c_2, \ldots c_m$ führt von der einen Seite von $\bar{c}_0$ auf die andere. Daher liegen die Endpunkte des ganzen Zuges zu verschiedenen Seiten von $\bar{c}_0$, d. h. s schneidet die Gerade $\bar{c}_0$. Es sei jetzt $r \neq 0$, $-m+1 \leqq r \leqq m-1$. Dann liegen die Endpunkte des Zuges $c_{r-1}\, c_r\, c_{r+1}$ auf derselben Seite der Geraden $\bar{c}_r$, ebenso die Endpunkte der Strecke c_{-r}. Dagegen führt jede der noch übrigen $2m-3$ Strecken c von der einen Seite von $\bar{c}_r$ auf die andere, und mithin liegen auch die Endpunkte des ganzen Zuges auf verschiedenen Seiten von $\bar{c}_r$. — Damit ist gezeigt, daß s die $2m-1$ *Geraden* $\bar{c}_r$, $(-m+1 \leqq r \leqq m-1)$ schneidet; es ist aber weiter zu zeigen, daß s die *Strecken* c_r schneidet. Zu diesem Zweck betrachten wir die Geraden $\bar{c}_m$, $\bar{c}_{-m}$. Ihr Schnittpunkt S liegt außerhalb der Strecken c_m, c_{-m}. Die beiden von S ausgehenden Strahlen, in denen die Strecken c_m, c_{-m} gelegen sind, begrenzen ein konvexes Gebiet (Winkelgebiet) $\mathfrak{W}$. (Falls $\bar{c}_m$ und $\bar{c}_{-m}$ sich überhaupt nicht schneiden, so soll unter $\mathfrak{W}$ das Gebiet zwischen den ganzen Geraden $\bar{c}_m$, $\bar{c}_{-m}$ verstanden werden.) Die Endpunkte der Strecke s gehören den Strecken c_m bzw. c_{-m} an. Daher ist s ganz in $\mathfrak{W}$ gelegen. Dasselbe gilt also auch von den Punkten, in denen s die Geraden $\bar{c}_r$, $(-m+1 \leqq r \leqq m-1)$ schneidet. Nun hat jede Strecke c_r sowohl mit c_m als mit c_{-m} einen Punkt gemein. Daraus ergibt sich, daß derjenige Teil der Geraden $\bar{c}_r$, welcher in das Gebiet $\mathfrak{W}$ fällt, ganz der Strecke c_r angehört; und somit liegt auch der Schnittpunkt von s und $\bar{c}_r$ auf der Strecke c_r. Damit ist der Beweis erbracht.

Es liege wieder ein $n = 2k$-Eck mit $\frac{n(n-4)}{2} + 1$ Doppelpunkten vor, und es mögen die früheren Bezeichnungen wieder gelten. Zwei konjugierte Ecken A_r, A_{-r+1} $(1 < r < k)$ begrenzen zwei Kantenzüge

$$a_{-r+1}\, a_{-r+2} \cdots a_0 \cdots a_{r-1}$$

und

$$a_r\, a_{r+1} \cdots a_k \cdots a_{n-r} = a_{-r}.$$

Bei jedem dieser Züge treffen die Voraussetzungen unseres letzten Satzes zu; jeder von ihnen wird daher durch Hinzufügung der Kante $s = A_r A_{-r+1}$ zu einem Polygon ($2r$-Eck bzw. $(n-2r+2)$-Eck) mit der Maximalzahl von Doppelpunkten ergänzt. Die Strecke s wird von den $n-4$ Kanten a,

[4]) Daß c_0 überhaupt Wendekante ist, muß im Falle $m=1$ besonders vorausgesetzt werden, ist aber im Falle $m>1$ eine Folge der übrigen Voraussetzungen unseres Satzes.

die durch keinen ihrer Endpunkte gehen, geschnitten. Die vier noch übrigen Kanten a verteilen sich nach unseren früheren Betrachtungen (s. Fig. 10) so, daß a_r und a_{-r+1} auf der einen, a_{r-1} und a_{-r} auf der andern Seite der Geraden $\bar{s} = A_r A_{-r+1}$ liegen. Insbesondere liegen a_{k-1} und a_{-k+2} auf der einen, a_{-k+1} und a_{k-2} auf der andern Seite der Geraden $A_{k-1} A_{-k+2}$.

Diese Betrachtungen führen uns zur *allgemeinen Konstruktion des n-Ecks mit maximalem ϑ bei geradem n*. Wir sehen diese Aufgabe für den Fall $n = 4$, wo sie trivial ist, und, wenn ein größerer Wert von n vorgelegt ist, für alle kleineren als bereits erledigt an. Bezeichnen wir die Ecken und Kanten des zu konstruierenden $n = (2k)$-Ecks wie bisher, so wird der Streckenzug $a_{-k+2} \dots a_0 \dots a_{k-2}$ zusammen mit der Verbindungsstrecke s seiner Endpunkte A_{-k+2}, A_{k-1} ein $(n-2)$-Eck mit maximalem ϑ darstellen, in welchem a_0 und s die ausgezeichneten Kanten sind. Wir werden daher unsere Konstruktion damit beginnen, daß wir ein beliebiges solches $(n-2)$-Eck zeichnen. Es handelt sich dann weiter darum, die noch fehlenden Kanten a_{-k+1}, a_{k-1}, a_k passend zu bestimmen.

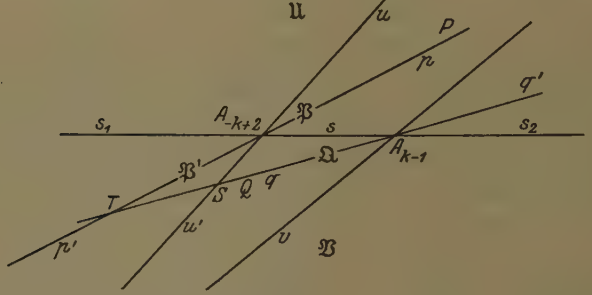

Fig. 11.

Die Gerade $\bar{s}$, in welcher die Kante s des $(n-2)$-Ecks liegt, besteht aus s und den beiden unendlich langen Stücken s_1, s_2, die sich an A_{-k+2} und A_{k-1} anschließen (Fig. 11); sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$. Die Ecken des Zuges

$$Z = a_{-k+3} \dots a_0 \dots a_{k-3},$$

dessen sämtliche Kanten s schneiden, liegen abwechselnd in diesen Halbebenen, etwa $A_{-k+4}, A_{-k+6}, \dots, A_{k-2}$ in $\mathfrak{U}$, $A_{-k+3}, A_{-k+5}, \dots, A_{k-3}$ in $\mathfrak{V}$. Wir denken uns von A_{-k+2} Strahlen nach den sämtlichen in $\mathfrak{U}$ gelegenen Ecken A gezogen und bezeichnen mit u den Strahl, der mit s den kleinsten Winkel bildet, mit u' seinen (ihn zur Geraden $\bar{u}$ ergänzenden) Gegenstrahl. Die Strahlen u und $s + s_2$ begrenzen ein konvexes Gebiet $\mathfrak{P}$,

die Strahlen u' und s_1 das zugehörige Scheitelgebiet $\mathfrak{P}'$. Die von A_{-k+2} ausgehenden Strahlen des Gebietes $\mathfrak{P}$ schneiden alle Kanten des Zuges Z; dagegen kann ein Strahl, der in $\mathfrak{U}$, aber nicht in $\mathfrak{P}$ verläuft, diejenigen Kanten von Z nicht schneiden, welche von einer in u gelegenen Ecke ausgehen. Derjenige Strahl p, welcher die zu konstruierende Kante a_{-k+1} enthalten soll, muß also dem Gebiet $\mathfrak{P}$ angehören. In gleicher Weise erhalten wir für diejenigen von A_{k-1} ausgehenden Strahlen der Halbebene $\mathfrak{B}$, welche alle Strahlen von Z schneiden, ein bestimmtes Gebiet $\mathfrak{Q}$, welches von $s + s_1$ und einem zweiten Strahle v begrenzt wird und auch den Strahl q enthalten muß, in welchem die Kante a_{k-1} liegen soll. Wir nehmen nun die Strahlen p und q in den Gebieten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ willkürlich an. Sind p', q' ihre Gegenstrahlen, so kann der Schnittpunkt der Geraden $\bar{p} = p + p'$ und $\bar{q} = q + q'$ nur entweder p und q' oder p' und q angehören. Nehmen wir das letztere an. Der Schnittpunkt T von p' und q liegt (wie der ganze Strahl p') im Gebiete $\mathfrak{P}'$, in welchem auch der Strahl q von dem Punkte S an, in welchem er u' schneidet, verläuft. Die Schnittpunkte von q mit den Kanten des Zuges Z, deren letzter Q heiße, gehören aber alle der Strecke $A_{k-1}S$ an. Denn in das Gebiet $\mathfrak{P}'$ kommen die Kanten von Z, weil jede mit u und s einen Punkt gemein hat, nicht hinein. *Es liegt also T auf dem Strahle q hinter S.* Nennen wir noch P den letzten Schnittpunkt von p mit den Kanten von Z. Die auf p anzunehmende Kante a_{-k+1} soll alle Kanten aus Z schneiden; ihr Endpunkt A_{-k+1} muß also hinter P liegen. Aus gleichem Grund muß der Endpunkt A_k von a_{k-1} auf q hinter Q liegen. Ferner aber muß A_k vor T liegen, weil a_{k-1} die Gerade $\bar{a}_{-k+1}$ nicht schneiden darf. Andererseits sieht man sofort, daß, wenn man für A_{-k+1} einen beliebigen Punkt von p hinter P, für A_k einen beliebigen Punkt zwischen Q und T wählt und $A_{-k+1}A_{-k+2} = a_{-k+1}$, $A_{k-1}A_k = a_{k-1}$ setzt, der Kantenzug

$$a_{-k+1} \cdots a_0 \cdots a_{k-1}$$

allen Bedingungen des Satzes S. 124 genügt, somit durch Hinzunahme der Kante $a_k = A_kA_{-k+1}$ zu einem n-Eck mit maximalem ϑ ergänzt wird.

Es mögen nun noch einige Angaben folgen, die wir nicht in allen Einzelheiten näher begründen, die sich aber aus dem Vorhergehenden leicht ergeben. Zunächst läßt sich im Anschluß an die allgemeine Konstruktion des $n = (2k)$-Ecks mit maximalem ϑ leicht der Nachweis führen, daß alle diese Polygone ein einziges Kontinuum bilden; d. h. daß man jedes in jedes andere stetig so überführen kann, daß es während der ganzen Bewegung stets ein n-Eck mit maximalem ϑ bleibt. Und das ist es eigentlich, was wir oben im Sinne hatten, wenn wir allen diesen n-Ecken dieselbe Struktur zusprachen. Im übrigen sind aber noch gewisse Ver-

schiedenheiten möglich. So ist z. B. die Reihenfolge der Punkte, in denen eine Kante von den übrigen geschnitten wird (für $n \geqq 8$), nicht mehr vollständig bestimmt, wie z. B. die Kanten 3 4 in den beiden Achtecken Fig. 12 und 13 zeigen.

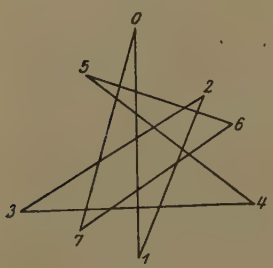

Fig. 12.

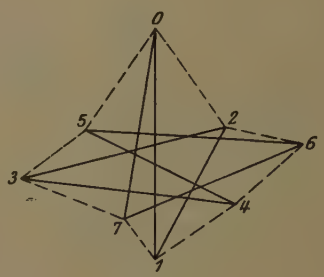

Fig. 13.

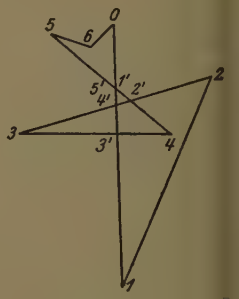

Fig. 14.

Auch die äußere Form der Figuren zeigt Verschiedenheiten; doch lassen sich hier auch mehrere für alle unsere n-Ecke gültige Merkmale aufstellen. Um dies näher auseinanderzusetzen, schicken wir einige allgemeine Bemerkungen voraus.

Durch ein Polygon P (s. das Siebeneck 0 ... 6 Fig. 14) wird die Ebene in eine Anzahl von Gebieten zerschnitten, von denen eines sich ins Unendliche erstreckt, die übrigen endlich sind. Läßt man das unendliche Gebiet fort, so bleibt ein Flächenstück übrig, dessen Perimeter wieder ein Polygon P' ist (in Fig. 14 das Polygon 0 1′ 2′ 2 1 3′ 3 4′ 5′ 5 6). Die Ecken von P' sind teils Ecken teils Doppelpunkte von P, doch brauchen nicht alle Ecken oder Doppelpunkte von P Ecken von P' zu sein; sie können auch (wie Ecke 4 der Figur) ins Innere von P' fallen. Die Kanten von P' können sich nicht schneiden, wohl aber können zwei Ecken von P' zusammenfallen (s. die Ecken 1′, 5′ der Figur). Unter den Ecken von P' können wir *ein-* und *ausspringende* unterscheiden. Doch nur bei denen, die *Ecken* von P sind, können beide Arten vorkommen (Fig. 14); die *Doppelpunkte* von P können nur einspringende Ecken von P' sein.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß das Ausgangspolygon P ein $n = (2k)$-Eck mit maximalem ϑ ist, und nehmen die früheren Bezeichnungen wieder auf. Die Seitenzahl des zugehörigen Polygons P' ist nicht völlig bestimmt, wie die beiden Achtecke Fig. 12 und 13 zeigen, von denen das erste für P' ein 19-, das zweite ein 17-Eck ergibt. Allgemein gilt aber folgendes: Sämtliche Ecken von P sind auch Ecken von P' und zwar ausspringende Ecken. Zwei benachbarte Ecken von P' können nicht beide Ecken von P sein. Vor allem aber gilt: *Die zyklische An-*

rdnung, in welcher die Ecken von P in P' erscheinen, ist völlig be-timmt. Um diese Anordnung genau zu bezeichnen, machen wir noch ie folgenden Angaben. Sind A_r, A_s zwei Ecken des n-Ecks P, so gibt s unter den Geraden $\bar{a}_i$, welche durch keine dieser Ecken gehen, im all-gemeinen solche, die A_r und A_s voneinander trennen. *Es gehören aber u jeder Ecke A_r genau zwei Ecken, die von ihr durch keine Gerade $\bar{a}_i$ etrennt werden.* Wenn A_r auf keiner der beiden ausgezeichneten Kanten iegt, so sind es die beiden Ecken, die (im Polygon P) zur konjugierten Ecke benachbart sind, also A_{-r} und A_{-r+2}. Ist aber A_r auf einer aus-gezeichneten Kante gelegen, also eine der Ecken $A_0, A_1, A_k, A_{k+1} = A_{-k+1}$, o erhält man in dieser Weise nur eine der beiden gesuchten Ecken, da ier A_{-r} oder A_{-r+2} mit A_r selbst identisch ist. Die noch fehlende Ecke ergibt sich aus der Bemerkung, daß im Falle $n \equiv 0 \bmod 4$ das Eckenpaar A_0, A_{-k+1} durch keine Gerade $\bar{a}_i$ getrennt wird, ebenso las Paar A_1, A_k; während im Falle $n \equiv 2 \bmod 4$ dasselbe von den Paaren A_0, A_k und A_1, A_{-k+1} gilt. Verbindet man nun je zwei Ecken, die durch keine Gerade $\bar{a}_i$ getrennt werden, so erhält man ein kontinuier-liches n-Eck P'' (in Fig. 13 gestrichelt), und die Folge, welche die Ecken n diesem haben, ist dieselbe, in welcher sie unter den Ecken von P' er-cheinen. Die Kanten von P'' verlaufen ganz im Außengebiet von P', und jede schneidet von diesem Gebiet ein konvexes Polygon ab. Das Polygon P'' braucht nicht konvex zu sein (Fig. 13), aber es ist frei von Doppelpunkten. Das zeigt man leicht, indem man sich die Ebene durch die Geraden $\bar{a}_i$ zerstückt denkt. Jede Kante von P'' verläuft dann ganz n einem der so erhaltenen Gebiete, aber jede in einem andern.

Breslau, den 24. Oktober 1919.

(Eingegangen am 21. September 1922.)

Über das Wachstum analytischer Funktionen in Halbstreifen und ähnlichen Gebieten.

Von

Ludwig Neder in Leipzig.

Wohlbekannt ist die Tatsache, daß die für Dirichletsche Reihen klassische, durch Vergleich von $|f(s)|$ mit Potenzen von $\tau = e^{\log \tau}(s = \sigma + i\tau)$ erhaltene, Lindelöfsche μ-Funktion stets konvex ist. In gleicher Richtung werden nachstehend einige allgemeine Sätze (1, 2 und 3) bewiesen, die sich auf die entsprechende, durch Vergleich von $|f(s)|$ mit Potenzen gewisser Funktionen $e^{\omega(\tau)}$ erhaltene, „Indexfunktion" beziehen. Die hierbei benutzten Hilfsmittel führen sodann zu zwei neuen Sätzen (4 und 5) aus dem Phragmén-Lindelöfschen Ideenkreise.

§ 1.

Ergebnisse.

1. Es sei in der Ebene der komplexen Veränderlichen $t = \tau + i\varphi$ ein Halbstreifen

$$\{\tau \geqq \tau_0, \quad \varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2\} \tag{1}$$

gegeben. Dann verstehen wir:

a) unter einer *Linie* L eine stetige Kurve ohne mehrfachen Punkt, die ganz im Halbstreifen (1) liegt und dessen linken Rand mit dem unendlich fernen Punkte verbindet;

b) unter einem *Halbstreifengebiet* H ein (einfach zusammenhängendes) Gebiet (ohne Rand), das links von einem Stück der Geraden $\tau = \tau_0$, unten und oben von einer Linie L_1 bzw. L_2 begrenzt ist, wobei L_1 und L_2 für $\tau > \tau_0$ keinen Punkt gemeinsam haben, und erstere die Gerade $\varphi = \varphi_1$, letztere die Gerade $\varphi = \varphi_2$ zur Asymptote hat.

Weiter verabreden wir:

Definition 1. Eine Funktion $\omega(t)$ heißt (*allgemeine*) *Vergleichsfunktion* der Breite $2\beta > 0$, wenn sie regulär und $\omega(\tau) > 0$ ist für $\tau \geqq \tau_{00}$, $|\varphi| \leqq \beta$, und wenn bei $\tau \to \infty$

$$\omega(\tau) \to \infty,$$

sowie

$$\frac{\omega'}{\omega}(t) = o(1) \text{ gleichmäßig in } |\varphi| \leqq \beta. \tag{2}$$

Definition 2. Wenn $\omega(t)$ Vergleichsfunktion der Breite $\varphi_2 - \varphi_1$ und die komplexe Funktion $f(t)$ in einem Halbstreifengebiete H und auf dessen Rand erklärt ist, so definieren wir den *Index* $h(\varphi)$ der Funktion $f(t)$ in bezug auf $\omega(\tau)$, auch die Werte $\pm\infty$ zulassend, durch die Beziehung

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{\tau=\infty}} \frac{\log|f(\tau+i\varphi)|}{\omega(\tau)}$$

für $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ und durch

$$h(\varphi_\nu) = \overline{\lim_{\tau=\infty}} \frac{\log|f(t)|}{\omega(\tau)} \text{ längs } L_\nu \ (\nu = 1, 2)$$

an den beiden Enden des Intervalls.

Bedingung $\mathfrak{B}$. In einem Halbstreifengebiete H sei die Funktion $f(t)$ regulär, ihr Betrag (eindeutig[1]) und) auch noch am Rande stetig, sowie bei $\tau \to \infty$

$$f(t) = O(e^{\varepsilon e^{\alpha\tau}}) \text{ gleichmäßig in } H,$$

für $\alpha = \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1}$ und jedes $\varepsilon > 0$.

2. Dann lauten die beiden ersten der oben erwähnten Sätze folgendermaßen:

Satz 1. *Es sei $\omega(t)$ Vergleichsfunktion der Breite $\varphi_2 - \varphi_1$ und $f(t)$ in einem Halbstreifengebiete H der Bedingung $\mathfrak{B}$ unterworfen, sowie bei $\tau \to \infty$*

$$f(t) = O(e^{k_\nu \omega(\tau)}) \text{ längs } L_\nu \ (\nu = 1, 2),$$

mit endlichem k_1, k_2. Wenn dann gesetzt wird

$$k(\varphi) = \frac{\varphi_2 - \varphi}{\varphi_2 - \varphi_1} k_1 + \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} k_2,$$

so ist bei $\tau \to \infty$

$$f(t) = O(e^{(k(\varphi)+\delta)\cdot\omega(\tau)}) \text{ gleichmäßig in } H, \tag{3}$$

für jedes $\delta > 0$.

[1]) Dies ist hier selbstverständlich und erst für Satz 4, sowie Hilfssatz 2 von Bedeutung.

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen ist die Indexfunktion* $h(\varphi)$ *konvex für* $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ *(also bekanntlich stetig, soweit sie beschränkt ist).*

Von diesen Sätzen ist eine Reihe spezieller Fälle bereits bekannt:

In der Tat beweisen die Herren Phragmén und Lindelöf[2]) für ein Winkelfeld

$$x = re^{i\varphi}, \quad \text{wo} \quad r > r_0, \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2,$$

ein Resultat, das sich für $x = e^t$ als der Spezialfall

$$\omega(t) = t^{\alpha_1}(\log t)^{\alpha_2}(\log\log t)^{\alpha_3}\ldots \tag{4}$$

unserer Sätze 1 und 2 erweist, da jedes solche $\omega(t)$ sich (da das erste $\alpha_\mu \neq 0$ positiv sein soll) unmittelbar als Vergleichsfunktion im Sinne unserer Definition 1 ergibt.

Daneben hat man noch die in (4) enthaltenen Unterfälle

$$\omega(t) = \log t\,(^3), \quad t\,(^4), \quad \log\log t\,(^5) \tag{5}$$

besonders betrachtet[6]).

3. Die Herren Phragmén und Lindelöf stellen sich übrigens a. a. O.[2]) zunächst auf einen wesentlich allgemeineren Standpunkt:

Der dortige Fall $\varrho = 0$ betrifft nämlich (in unserer Bezeichnungsweise) solche Vergleichsfunktionen $\omega(t)$, für welche statt (2) die Beziehung

---

[2]) Sur une extension d'un principe classique de l'analyse ... [Acta math. **31** (1908), S. 381], vgl. Nr. 18.

[3]) Lindelöf, Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$ [Bull. des Sc. math. (2) **32** (1908), Teil 1, S. 341], vgl. S. 349. Eine im Beweise auftretende Hilfsfunktion hat Herr Landau durch die jetzt übliche einfachere ersetzt: Über die Anzahl der Gitterpunkte in ebenen Bereichen [Gött. Nachr. 1912, S. 687], vgl. Hilfssatz 6.

[4]) Hardy, The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series [Quart. Journ. of p. a. a. Math. **37** (1916), S. 176], vgl. S. 178, woher auch die Bezeichnung „Index" des Textes entlehnt ist.

[5]) Cramér, Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn E. Landau [Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 155]. Unter diesen Fall subsumiert sich auch ein Resultat der Herren Bohr und Landau, Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion [Math. Ann. **74** (1913), S. 3], vgl. Hilfssatz 5, welcher die Konvexität der Funktion $\nu(\sigma')$ betrifft, die als die untere Grenze der $\varkappa$ mit

$$|\log \zeta(s)| = O(1)\cdot(e^{\lg\log\tau})^{\varkappa} \text{ gleichmäßig in } \sigma \geqq \sigma'$$

erklärt ist.

[6]) Auch im Falle $\omega(t) = 1$ gilt Satz 1 (in einer verschärften Gestalt) und Satz 2, wie die Herren Hardy und Littlewood gezeigt haben: Abel's theorem and its converse [Proc. Lond. math. Soc. (2) **18** (1918), S. 205], vgl. S. 216 die Fußnote.

$$(2)' \qquad \frac{\omega(\tau + i\varphi)}{\omega(\tau)} = 1 + o(1) \text{ gleichmäßig für } |\varphi| \leqq \beta$$

erfüllt ist[7]).

Es wird aber in diesem allgemeinen Falle unter den Voraussetzungen unserer Sätze 1 und 2 nur das Resultat

$$h(\varphi) \leqq \max(h(\varphi'), h(\varphi'')) \quad \text{bei} \quad \varphi_1 \leqq \varphi' < \varphi < \varphi'' \leqq \varphi_2$$

erzielt, was weniger besagt als Satz 2.

Will man nämlich die Konvexität von $h(\varphi)$ beweisen, so braucht man zu beliebig gegebenen reellen Konstanten A, B eine *Hilfsfunktion* $g(t)$, für welche bei $\tau \to \infty$ die Relation

$$(6) \qquad \Re g(t) = (A\varphi + B + o(1)) \cdot \omega(\tau) \text{ gleichmäßig in } |\varphi| \leqq \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

besteht.

Eine solche Hilfsfunktion findet sich á. a. O.[2]) nur im Falle (4) unter der Gestalt

$$g(t) = -iA\frac{t\omega(t)}{\alpha_1 + 1} + B\omega(t),^{8})$$

während nachstehend in

$$(7) \qquad g(t) = -iA\int_{\tau_{00}}^{t} \omega(z)dz + B\omega(t)$$

die für alle unsere Vergleichsfunktionen passende Hilfsfunktion sich ergeben wird.

Daß dieselbe in der Tat die Eigenschaft (6) besitzt, wird im § 2 bewiesen (der Beweis ist durchsichtiger als im Spezialfall (4)) und ermöglicht anschließend den Beweis der Sätze 1 und 2 auf dem Phragmén-Lindelöfschen Wege.

4. Was nunmehr Satz 3 angeht, so ist für die Funktionen (5) bereits bekannt (bzw. leicht zu sehen), daß unter den Voraussetzungen des Satzes 1 in der Behauptung (3) das δ gestrichen werden kann — wenigstens, wenn H das Innere eines eigentlichen Halbstreifens (1) ist. Auch diese Tatsache bleibt für einen abgerundeten Bereich von Funktionen $\omega(t)$ gültig:

---

[7]) Dieser Standpunkt ist sogar noch etwas allgemeiner als der unsere, da $(2)'$ aus (2) folgt (vgl. Formel (10) des Textes), während (2) aus $(2)'$ anscheinend nur für $|\varphi| \leqq \beta'$, wo $0 < \beta' < \beta$, erschlossen werden kann. Trotzdem unsere Betrachtungen auch mit $(2)'$ statt (2) gelten, ziehen wir dennoch Definition 1 in der obigen Gestalt vor, aus Gründen der Anschaulichkeit und Handlichkeit.

[8]) Diese Hilfsfunktion und ihre Eigenschaft (6) liegt auch den vorgenannten Beweisen der Herren Landau, Hardy und Cramér zugrunde.

Definition 3. Eine Funktion $\omega(t)$ heißt *scharfe Vergleichsfunktion* der Breite $2\beta > 0$, wenn sie regulär und $\omega(\tau) > 0$ ist für $\tau \geqq \tau_{00}$, $|\varphi| \leqq \beta$, und wenn bei $\tau \to \infty$

$$\omega(\tau) \to \infty,$$

sowie

$$\omega''(t) = O(1) \text{ gleichmäßig in } |\varphi| \leqq \beta. \tag{8}$$

Satz 3. *Es seien $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ... scharfe Vergleichsfunktionen der Breite $\varphi_2 - \varphi_1$ in endlicher Anzahl und $f(t)$ im Inneren eines eigentlichen Halbstreifens (1) der Bedingung $\mathfrak{B}$ unterworfen, sowie bei $\tau \to \infty$*

$$f(t) = O(e^{k_{1\nu}\omega_1(\tau) + k_{2\nu}\omega_2(\tau) + \cdots}) \text{ längs } \varphi = \varphi_\nu \quad (\nu = 1, 2).$$

Wenn dann gesetzt wird

$$k_\mu(\varphi) = \frac{\varphi_2 - \varphi}{\varphi_2 - \varphi_1} k_{\mu 1} + \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} k_{\mu 2} \quad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

so ist bei $\tau \to \infty$

$$f(t) = O(e^{k_1(\varphi)\omega_1(\tau) + k_2(\varphi)\omega_2(\tau) + \cdots}),$$

gleichmäßig in (1).[9])

Der Beweis dieses Satzes wird im § 3 gegeben und beruht auf einer für scharfe Vergleichsfunktionen möglichen Verbesserung der Eigenschaft (6) unserer Hilfsfunktion (7).

5. Im § 4 ergänzen wir die vorstehenden Betrachtungen nach verschiedenen Seiten. Im besonderen zeigen wir die *Reichweite* der Sätze 1 und 2 an einigen neuen Typen allgemeiner Vergleichsfunktionen, besprechen dann *Kriterien* (enthaltend Wachstumsschranken) für allgemeine und für scharfe Vergleichsfunktionen und berühren zum Schluß die Frage nach der *Verschärfbarkeit* unserer Sätze 1, 2 und 3.

6. Die bisher genannten Sätze betreffen das Verhalten von $f(t)$ längs Geraden (oder „fast geraden" Linien L) sowie zwischen solchen.

Im § 5 werden wir zwei Resultate erhalten, welche spezielle Fälle der Sätze 1 und 2 von Geraden auf beliebige Linien L (und z. T. noch weiter) verallgemeinern und eine bemerkenswerte Verschärfung gewisser (s. u.) für $\omega(t) = 1$ bekannter Sätze in sich schließen:

Satz 4. *Es sei T ein zusammenhängender Bereich, der dem Halbstreifen (1) angehört, $\omega(t)$ eine Vergleichsfunktion der Breite $\varphi_2 - \varphi_1$ und $f(t)$ in T der Bedingung $\mathfrak{B}$ (mutatis mutandis) unterworfen. Wenn dann auf dem Rande von T gleichmäßig*

$$\overline{\lim_{\tau = \infty}} \frac{\log |f(t)|}{\omega(\tau)} \leqq k \; (< \infty) \text{ bzw. } = -\infty,$$

so gilt dies auch im Innern.

[9]) Wir werden tatsächlich etwas mehr beweisen.

Satz 5. *Es sei $\omega(t)$ Vergleichsfunktion der Breite $\varphi_2 - \varphi_1$ und $f(t)$ in einem Halbstreifengebiete H regulär, $|f(t)|$ auch noch am Rande stetig, sowie bei $\tau \to \infty$*

$$f(t) = O(e^{k\omega(\tau)}) \text{ gleichmäßig in } H,$$

wo $k < \infty$. Wenn dann L eine Linie[10]*) bedeutet, die ganz in H einschließlich Rand liegt, und*

$$\overline{\lim_{\tau=\infty}} \frac{\log|f(t)|}{\omega(\tau)} = -\infty \text{ längs } L, \tag{9}$$

so gilt dies auch, und zwar gleichmäßig, in $\varphi_1 + \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \gamma$, für jedes kleine $\gamma > 0$.[9])

Für $\omega(t) = 1$ geht die zweite Behauptung des Satzes 4 über in einen Satz des Herrn Lindelöf[11]), Satz 5 über in ein für gerades L durch Herrn Montel[12]), allgemein durch Herrn Lindelöf[13]) erhaltenes Resultat.

Dagegen geht die erste Behauptung des Satzes 4 über in einen anscheinend neuen Satz, der mit einem wohlbekannten Ergebnis der Herren Phragmén und Lindelöf[14]), dem Hilfssatz 2 des Textes, nicht zu verwechseln ist.

7. Im § 6 gehen wir ganz kurz auf *Analoga unserer Sätze* für $\Re f(t)$ statt $|f(t)|$ ein. Analoga für mehrdimensionale Potentiale dürften ohne Interesse sein.

8. Die im Texte lediglich für Halbstreifen in der speziellen Lage (1) formulierten Sätze können durch konforme Abbildung in mannigfacher Weise auf *andere Gebiete* (Halbstreifen in allgemeiner Lage, Winkelfelder, Kreisbogenzweiecke, Kreise usw.) übertragen werden. Nach den durch die Herren Phragmén und Lindelöf gegebenen Vorbildern[14]) ist dies trivial und kann dem Leser überlassen werden.

Ebenso bietet es keinerlei Schwierigkeit, Analoga unserer Sätze für einen *Vollstreifen* abzuleiten, indem man in üblicher Weise denselben durch einen Querschnitt in zwei Halbstreifen teilt und auf jeden derselben den zu übertragenden Satz anwendet.

---

[10]) Im Sinne von Nr. 1.

[11]) Sur un principe général de l'analyse et son application ... [Acta Soc. Sc. Fenn. **46** (1920), 4. Abh. (1915)], vgl. Nr. 5.

[12]) Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles [Ann. de l'Éc. norm. (3) **29** (1912), S. 487], vgl. Nr. 23.

[13]) A. a. O.[11]), Nr. 6.

[14]) A. a. O.[2]), Nr. 6.

§ 2.

Allgemeine Vergleichsfunktionen.

Hilfssatz 1. Bei allgemeinen Vergleichsfunktion $\omega(t)$ der Breite 2β ist, wenn bei gegebenen reellen Konstanten A, B

$$g(t) = -iA\int_{\tau_{00}}^{t}\omega(z)dz + B\omega(t) \tag{7}$$

gesetzt wird, für $\tau \to \infty$

$$\Re g(t) = (A\varphi + B + o(1))\cdot\omega(\tau), \tag{6}$$

wo $o(1)$ hier und im Beweise gleichmäßig für $|\varphi| \leqq \beta$ gilt.

Beweis. Wegen (2) ist $\log\omega(t)$ regulär für alle $\tau \geqq \tau_1$, und darum

$$\log\omega(t) - \log\omega(\tau) = i\int_0^{\varphi}\frac{\omega'}{\omega}(\tau + i\psi)d\psi = o(1),$$

also

$$\omega(t) = \omega(\tau)\,e^{o(1)} = (1 + o(1))\cdot\omega(\tau). \tag{10}$$

Daher ist weiter

$$\begin{aligned} -i\int_{\tau_{00}}^{t}\omega(z)dz &= -i\int_{\tau_{00}}^{\tau}\omega(\vartheta)d\vartheta + \int_0^{\varphi}\omega(\tau + i\psi)d\psi \\ &= -i\int_{\tau_{00}}^{\tau}\omega(\vartheta)d\vartheta + \int_0^{\varphi}(1 + o(1))\cdot\omega(\tau)d\psi \\ &= -i\int_{\tau_{00}}^{\tau}\omega(\vartheta)d\vartheta + (\varphi + o(1))\cdot\omega(\tau). \end{aligned} \tag{11}$$

Da hierin das Integral wegen $\omega(\vartheta) > 0$ reell ist, liefert der Realteil von $A\cdot(11) + B\cdot(10)$ die Behauptung.

Weiter benötigen wir den folgenden, von den Herren Phragmén und Lindelöf[14]) herrührenden, hier als bekannt vorausgesetzten

Hilfssatz 2. Es sei T ein zusammenhängender Bereich, der dem Halbstreifen (1) angehört und $F(t)$ in T der Bedingung $\mathfrak{B}$ (mutatis mutandis) unterworfen. Wenn dann auf dem Rande von T durchweg

$$|F(t)| \leqq C$$

ist, so gilt dies auch im Innern.

Beweis des Satzes 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\varphi_1 = -\varphi_2$ voraus, da man sonst nur $t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ durch eine neue Veränderliche zu ersetzen braucht[15]), sowie $\tau_0 \geqq \tau_{00}$,[16]) da man sonst

[15]) Diese Überlegung kann wegfallen, wenn (wie es meistens zutrifft) $\omega(t)$ Vergleichsfunktion jeder endlichen Breite ist.

[16]) Diese Zahlen wurden durch (1) bzw. Definition 1 erklärt.

von unserem Halbstreifengebiete H nur ein endliches Stück wegzulassen braucht.

Wir bestimmen nun, $\delta' = \frac{1}{2}\delta$ gesetzt, die Konstanten A, B aus dem Gleichungssystem

$$A\varphi_\nu + B = k_\nu + \delta' = k(\varphi_\nu) + \delta' \quad (\nu = 1, 2) \tag{12}$$

und betrachten dann die nach (7) gebildete, in H reguläre, dem Betrage nach auch noch auf dem Rande stetige Funktion

$$F(t) = f(t)\, e^{-g(t)}.$$

Für sie ergibt sich aus (6) wegen

$$\log \omega(\tau) = \text{konst.} + \int_{\tau_{00}}^{\tau} \frac{\omega'}{\omega}(\vartheta)\, d\vartheta = o(\tau), \text{ also } \omega(\tau) = o(e^{\alpha\tau}),$$

die folgenden O und o bei $\tau \to \infty$ gleichmäßig in H verstanden, für jedes $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$ gesetzt,

$$F(t) = O(e^{\varepsilon' e^{\alpha\tau}}) \cdot e^{o(e^{\alpha\tau})} = O(e^{\varepsilon e^{\alpha\tau}}), \tag{13}$$

sowie wegen $\varphi = \varphi_\nu + o(1)$ längs L_ν, und (12)

$$\begin{aligned} F(t) &= O(e^{k_\nu \omega(\tau)}) \cdot e^{-(A\varphi_\nu + B + o(1)) \cdot \omega(\tau)} \\ &= O(1) \text{ längs } L_\nu \quad (\nu = 1, 2). \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 2 ist daher

$$F(t) = O(1), \tag{14}$$

so daß unter nochmaliger Verwendung von (6) und (12)

$$f(t) = F(t)\, e^{g(t)} = O(1)\, e^{(k(\varphi) + \delta' + o(1)) \cdot \omega(\tau)} = O(e^{(k(\varphi) + \delta) \cdot \omega(\tau)}),$$

d. h. die Behauptung, folgt.

Beweis des Satzes 2. Nach Satz 1 ist vor allen Dingen die Indexfunktion $h(\varphi)$ nach oben beschränkt für $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$.

Es sei nun $\varphi_1 \leqq \varphi' < \varphi < \varphi'' \leqq \varphi_2$. Nach Satz 1 ist dann, wenn k', k'' endliche Zahlen $\geqq h(\varphi')$ bzw. $\geqq h(\varphi'')$ bedeuten,

$$h(\varphi) \leqq \frac{\varphi'' - \varphi}{\varphi'' - \varphi'} k' + \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi'' - \varphi'} k''. \tag{15}$$

Hieraus folgt:

Entweder ist $h(\varphi)$ durchweg $> -\infty$ und dann eine auch nach unten beschränkte, für $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ obendrein stetige Funktion.

Oder es ist einmal $h(\varphi) = -\infty$, und dann auf Grund von (15)

$$h(\varphi) = -\infty \text{ wenigstens für } \varphi_1 < \varphi < \varphi_2.$$

§ 3.

Scharfe Vergleichsfunktionen.

Hilfssatz 3. Bei einer scharfen Vergleichsfunktion $\omega(t)$ der Breite 2β gilt für die durch (7) erklärte Hilfsfunktion $g(t)$ bei $\tau \to \infty$ die Beziehung

$$\Re g(t) = (A\varphi + B)\cdot\omega(\tau) + O(1), \tag{16}$$

wo $O(1)$ hier und im Beweise gleichmäßig für $|\varphi| \leqq \beta$ gilt.

Beweis. Zunächst ist

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega(\tau) + i\int_0^{\varphi}\omega'(\tau + i\psi)\,d\psi \\ &= \omega(\tau) + i\varphi\,\omega'(\tau) + \int_0^{\varphi}(\psi - \varphi)\cdot\omega''(\tau + i\psi)\,d\psi \\ &= \omega(\tau) + i\varphi\,\omega'(\tau) + O(1). \qquad (17)\end{aligned}$$

Daher ist weiter

$$\begin{aligned}-i\int_{\tau_{00}}^{t}\omega(z)\,dz &= -i\int_{\tau_{00}}^{\tau}\omega(\vartheta)\,d\vartheta + \int_0^{\varphi}\omega(\tau + i\psi)\,d\psi \\ &= -i\int_{\tau_{00}}^{\tau}\omega(\vartheta)\,d\vartheta + \varphi\,\omega(\tau) + i\frac{\varphi^2}{2}\omega'(\tau) + O(1). \qquad (18)\end{aligned}$$

Da hierin rechts das erste und dritte Glied rein imaginär ist wegen $\omega(\tau) > 0$ für $\tau \geqq \tau_{00}$, liefert wiederum der Realteil von $A\cdot(18) + B\cdot(17)$ die Behauptung.

Beweis des Satzes 3. Wir zeigen tatsächlich etwas mehr, indem wir außer dem Innern von Halbstreifen (1) auch solche Halbstreifengebiete H zulassen, bei welchen die Randlinie L_1 bzw. L_2 in einem Gebiete

$$\varphi - \varphi_\nu = O\Big(\frac{1}{\sum\omega_\mu(\tau)}\Big), \quad \nu = 1 \text{ bzw. } 2, \tag{19}$$

verläuft[17]), wobei die Summation hier und im Reste des Beweises über $\mu = 1, 2, \ldots$ zu erstrecken ist.

Wieder nehmen wir (wie im Beweise des Satzes 1) ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_1 = -\varphi_2$ und $\tau_0 \geqq \tau_{00}$ an, bestimmen das Konstantenpaar A_μ, B_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus dem Gleichungssystem

$$A_\mu\varphi_\nu + B_\mu = k_{\mu\nu} = k_\mu(\varphi_\nu) \quad (\nu = 1, 2), \tag{20}$$

[17]) Genau diese Bedingung kommt für eine einzelne Vergleichsfunktion, nämlich $\omega(t) = \log\log t$, bei Herrn Cramér a. a. O.[5]) vor.

und betrachten dann, die aus $\omega_\mu(t)$ nach (7) gebildete Hilfsfunktion mit $g_\mu(t)$ bezeichnend, die in H reguläre, dem Betrage nach auch noch auf dem Rande stetige Funktion

$$F(t) = f(t)\, e^{-\Sigma g_\mu(t)}.$$

Analog wie im § 2 ergibt sich für sie aus (16) wegen

$$\omega_\mu''(\tau) = O(1), \qquad \omega_\mu'(\tau) = O(\tau), \qquad \omega_\mu(\tau) = O(\tau^2) = o(e^{\alpha\tau})$$

die Beziehung (13), sowie wegen (19) und (20)

$$F(t) = O(e^{\Sigma k_{\mu\nu}\omega_\mu(\tau)}) \cdot e^{-\Sigma(A_\mu\varphi_\nu + B_\mu)\cdot\omega_\mu(\tau) + O(1)} = O(1) \text{ längs } L_\nu \quad (\nu = 1, 2).$$

Nach Hilfssatz 2 gilt daher wieder (14), so daß aus (16) und (20) schließlich

$$f(t) = F(t)\, e^{\Sigma g_\mu(t)} = O(1)\, e^{\Sigma k_\mu(\varphi)\omega_\mu(\tau) + O(1)} = O(e^{\Sigma k_\mu(\varphi)\omega_\mu(\tau)}),$$

d. h. die Behauptung folgt.

§ 4.

Ergänzungen.

1. Zunächst wollen wir einige neue Typen allgemeiner Vergleichsfunktionen vorführen. In erster Linie ist hier wohl

$$\omega(t) = e^{t^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \tag{21}$$

zu nennen, das sich wegen

$$\left|\frac{\omega'}{\omega}(t)\right| = \frac{\alpha}{|t|^{1-\alpha}} \leqq \frac{\alpha}{\tau^{1-\alpha}}$$

als Vergleichsfunktion jeder endlichen Breite erweist. In zweiter Linie sei

$$\omega(t) = e^{t/\log^r t} \quad (r = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

genannt, wo $\log^r t$ den $(r-1)$-fach iterierten Logarithmus bedeutet, und

$$\frac{\omega'}{\omega}(t) = \frac{1}{\log^r t}\left(1 - \frac{1}{\log^1 t \ldots \log^r t}\right) = o(1)$$

in jedem Halbstreifen $\{\tau \geqq \tau_{00},\ |\varphi| \leqq \beta\}$. Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren, wir begnügen uns damit

$$\omega(t) = e^{(\log^r t)^\alpha} \quad (\alpha \geqq 0)$$

kurz zu erwähnen.

2. Weiter sei darauf hingewiesen, daß auf Grund der Definition 1 das Produkt

$$\omega(t) = \omega_1(t) \cdot \omega_2(t) \ldots$$

endlich vieler Vergleichsfunktionen der Breite β ohne weiteres als Vergleichsfunktion derselben Breite erkennbar ist.

3. Für das Folgende sei an die einfache Tatsache erinnert, daß bei einer Funktion $\varrho(t)$, die in einem Winkelfelde

$$\{\tau \geqq \tau_{00} > 0,\ |\varphi| \leqq q\tau\} \tag{23}$$

regulär und bei $\tau \to \infty$ gleichmäßig

$$= o(\tau^\alpha) \text{ bzw. } = O(\tau^\alpha)$$

ist, entsprechend

$$\varrho'(t) = o(\tau^{\alpha-1}) \text{ bzw. } = O(\tau^{\alpha-1})$$

aus der Cauchyschen Integralformel folgt.

4. Daher erhält man ein Kriterium für allgemeine Vergleichsfunktionen jeder endlichen Breite, wenn man in der Definition 1 an Stelle von (2) verlangt, daß

$$\omega(t) = e^{\varrho(t)},$$

wobei in einem Winkelfelde (23)

$$\varrho(t) \text{ regulär und } = o(\tau) \tag{24}$$

ist. Denn dann folgt

$$\frac{\omega'}{\omega}(t) = \varrho'(t) = o(1),$$

gleichmäßig in jedem Halbstreifen (1).

Dieser Satz erlaubt, auch Funktionen von beliebig komplizierter Bauart, wie z. B.

$$\omega(t) = \exp\left(\sqrt{t}\, e^{\sqrt{\log t}}\, e^{e^{\sqrt{\log\log t}}}\right),$$

wo $\exp z = e^z$, leicht als Vergleichsfunktionen zu erkennen.

5. Entsprechend erhält man ein Kriterium für scharfe Vergleichsfunktionen jeder endlichen Breite, wenn man in der Definition 3 an Stelle von (8) verlangt, daß in einem Winkelfelde (23)

$$\omega(t) \text{ regulär und } = O(\tau^2) \tag{25}$$

sein soll. Denn dann folgt der Reihe nach

$$\omega'(t) = O(\tau), \quad \omega''(t) = O(1)$$

gleichmäßig in einem Winkelfelde (23), also auch in jedem Halbstreifen (1).

6. Daß in unseren Sätzen 1 und 2 die Schranke $o(\tau)$ aus (24) bzw. die Schranke $o(1)$ aus (2) keiner wesentlichen Verbesserung fähig ist, zeigt im Falle

$$\omega(t) = e^{\varepsilon t}, \text{ also } \frac{\omega'}{\omega}(t) = \varepsilon \quad (> 0 \text{ und beliebig klein})$$

das bekannte Beispiel

$$f(t) = e^{e^{\varepsilon t}} \text{ mit } |f(\tau + i\varphi)| = e^{e^{\varepsilon\tau}\cos\varepsilon\varphi}.$$

Andererseits reicht das Wachstum unserer allgemeinen Vergleichsfunktionen, wie die Beispiele (22) zeigen, nahezu beliebig an die genannten Schranken heran.

7. Daß entsprechend in unserem Satze 3 die Schranke $O(\tau^2)$ aus (25) bzw. die Schranke $O(1)$ aus (8) keiner wesentlichen Verbesserung fähig ist, zeigt im Falle

$$\omega(t) = t^2 \log^r t \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

wo im Sinne der Nr. 3

$$\omega'(t) = 2t \log^r t + O(\tau), \qquad \omega''(t) = 2 \log^r t + O(1)$$

wird, das Beispiel

$$f(t) = e^{(t^2+1) \log^r t}$$

mit

$$|f(\tau + i\varphi)| = e^{\tau^2 \log^r \tau + (1-\varphi^2) \log^r \tau + O(1)} \text{ für } |\varphi| \leqq 1.$$

§ 5.

Analytische Funktionen längs beliebiger Linien L.

Beweis des Satzes 4. Es genügt, die erste, auf endliches k bezügliche, Behauptung zu beweisen, da die zweite, $-\infty$ betreffende, daraus unmittelbar folgt. Dabei darf man wieder (wie im Beweise des Satzes 1) ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_1 = -\varphi_2$ und $\tau_0 \geqq \tau_{00}$ annehmen.

Sei also $\delta > 0$ gegeben. Dann betrachten wir die in unserem Bereiche T reguläre, dem Betrage nach eindeutige und auch noch auf dem Rande stetige Funktion

$$F(t) = f(t)\, e^{-(k+\delta)\cdot\omega(t)}.$$

Für sie ergibt sich, die folgenden O und o bei $\tau \to \infty$ gleichmäßig in T verstanden, wie im § 2 die Beziehung (13) für jedes $\varepsilon > 0$, sowie auf dem Rande wegen (6)

$$|F(t)| \leqq e^{(k+o(1))\cdot\omega(\tau)} \cdot e^{-(k+\delta+o(1))\cdot\omega(\tau)} = O(1).$$

Nach Hilfssatz 2 gilt daher in ganz T zunächst (14), und infolgedessen

$$f(t) = F(t)\, e^{(k+\delta)\cdot\omega(t)} = O(1)\, e^{(k+\delta+o(1))\cdot\omega(\tau)},$$

was die Behauptung enthält.

Beweis des Satzes 5. Wieder setzen wir (wie im Beweise des Satzes 1) ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_1 = -\varphi_2$ und $\tau_0 \geqq \tau_{00}$ voraus. Ferner dürfen wir aus Stetigkeitsgründen annehmen, daß für $\tau > \tau_0$ die Linie L weder mit dem unteren Rande L_1 noch mit dem oberen Rande L_2 unseres Halbstreifengebietes H einen Punkt gemein hat, so daß (links begrenzt von $\tau = \tau_0$) zwischen L und L_ν $(\nu = 1, 2)$ ein Bereich T_ν im Sinne des Hilfssatzes 2 liegt.

Wir bestimmen nun bei beliebig gegebenem $\gamma > 0$ und $G > 0$ das Konstantenpaar A_ν, B_ν $(\nu = 1, 2)$ bzw. aus dem Gleichungssystem

$$(26) \qquad \begin{cases} A_1\varphi_1 + B_1 = G + k + 1, & A_1(\varphi_1 + \gamma) + B_1 = 0; \\ A_2\varphi_2 + B_2 = G + k + 1, & A_2(\varphi_2 - \gamma) + B_2 = 0; \end{cases}$$

so daß also

$$(27) \qquad A_\nu\varphi + B_\nu \leqq 0 \quad \text{für} \quad \varphi_1 + \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \gamma \qquad (\nu = 1, 2).$$

Dann betrachten wir für $\nu = 1, 2$ die nach (7) gebildete, in T_ν reguläre, dem Betrage nach auch noch am Rande stetige Funktion

$$F_\nu(t) = f(t)\, e^{-g_\nu(t)}.$$

Für sie ergibt sich, wie im § 2, bei $\tau \to \infty$ die Beziehung (13) gleichmäßig in T_ν für jedes $\varepsilon > 0$, während nach (6) längs L_ν wegen $\varphi = \varphi_\nu + o(1)$ und (26)

$$|F_\nu(t)| \leqq e^{(k+o(1))\cdot\omega(\tau)} \cdot e^{-(A_\nu\varphi_\nu + B_\nu + o(1))\cdot\omega(\tau)} = e^{-(G+1+o(1))\cdot\omega(\tau)}$$

und längs L wegen (9) dieselbe Beziehung resultiert. Nach Satz 4 ist daher

$$|F_\nu(t)| \leqq e^{-(G+1+o(1))\cdot\omega(\tau)} \text{ gleichmäßig in } T_\nu.$$

In dem nicht unterhalb von $\varphi = \varphi_1 + \gamma$ bzw. nicht oberhalb von $\varphi = \varphi_2 - \gamma$ gelegenen (nicht notwendig zusammenhängenden) Teile $T_\nu(\gamma)$ von T_ν ist deshalb, ebenfalls gleichmäßig, wegen (6) und (27)

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |F_\nu(t)| \cdot e^{\Re g_\nu(t)} = |F_\nu(t)| \cdot e^{(A_\nu\varphi + B_\nu + o(1))\cdot\omega(\tau)} \\ &\leqq e^{-(G+1+o(1))\cdot\omega(\tau)} \leqq e^{-G\omega(\tau)} \quad \text{für} \quad \tau \geqq \tau_1. \end{aligned}$$

Und da jeder Punkt von H mit $\varphi_1 + \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \gamma$ entweder zu $T_1(\gamma)$ oder zu $T_2(\gamma)$ gehört, so folgt daraus die Behauptung.

§ 6.

Analoga für logarithmische Potentiale.

Es genügt, die Analoga zu den Sätzen 2 und 5 auszuführen, da die zu den übrigen Sätzen dann auf der Hand liegen.

Dabei beschränken wir uns der Kürze halber auf das Innere H^* eines eigentlichen Halbstreifens (1).

Definition 2*. Wenn $\omega(t)$ Vergleichsfunktion der Breite $\varphi_2 - \varphi_1$ und die reelle Funktion $u(\tau, \varphi)$ in (1) erklärt ist, so verstehen wir unter dem oberen, unteren bzw. absoluten Index die Funktionen

$$\overline{\eta}(\varphi) = \overline{\lim_{\tau=\infty}} \frac{u(\tau,\varphi)}{\omega(\tau)}, \qquad \underline{\eta}(\varphi) = \underline{\lim_{\tau=\infty}} \frac{u(\tau,\varphi)}{\omega(\tau)} \qquad (\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2).$$

Dann gilt

Satz 2*. Wenn $\omega(t)$ Vergleichsfunktion der Breite $\varphi_2 - \varphi_1$, sowie $u(\tau, \varphi)$ in H^* harmonisch, auch noch am Rande stetig, und bei $\tau \to \infty$

(28) $\quad u(\tau, \varphi) \leqq$ bzw. $= o(e^{\alpha\tau})$ gleichmäßig in $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$,

so ist $\overline{\eta}(\varphi)$ bzw. auch $\underline{\eta}(\varphi)$ und $\eta(\varphi)$ konvex für $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$.

Beweis. Einerseits ist, wenn $f(t)$ die bis auf eine additive, rein imaginäre Konstante wohlbestimmte in H^* reguläre analytische Funktion bedeutet, deren Realteil $u(\tau, \varphi)$ ist, $\overline{\eta}(\varphi)$ wegen

(29) $$|e^{f(t)}| = e^{u(\tau, \varphi)}$$

einfach der Index $h(\varphi)$ der Funktion $e^{f(t)}$, also nach Satz 2 konvex. Andererseits ist $-\eta(\varphi)$ konvex als oberer Index der Funktion $-u(\tau, \varphi)$, und schließlich auch

$$\eta(\varphi) = \max(\overline{\eta}(\varphi), -\underline{\eta}(\varphi))$$

als größere (eigentlich $\geqq$) zweier konvexer Funktionen.

Satz 5*. Wenn statt (28) bei $\tau \to \infty$

$$u(\tau, \varphi) \leqq (k + o(1)) \cdot \omega(\tau) \text{ gleichmäßig in } H^*,$$

sowie längs der Linie L des Satzes 5

$$\overline{\lim_{\tau=\infty}} \frac{u(\tau, \varphi)}{\omega(\tau)} = -\infty,$$

so gilt dies auch gleichmäßig in $\varphi_1 + \gamma \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \gamma$, für jedes kleine $\gamma > 0$.

Beweis. Gleichung (29) und Satz 5.

Leipzig, den 15. Oktober 1922.

(Eingegangen am 17. Oktober 1922.)

Über affine Geometrie:
Zur Theorie der Affingesimsflächen.

Von

E. Salkowski in Hannover.

---

1. In dem 28. Beitrag über affine Geometrie hat W. Blaschke[1]) nachgewiesen, daß die einzigen nicht abwickelbaren Flächen, die bei beliebiger Parallelbeleuchtung ebene Kurven als Eigenschattengrenzen besitzen, die Flächen zweiter Ordnung sind. Es liegt in derselben Richtung der Untersuchung, diejenigen Flächen zu bestimmen, die eine Schar von ∞^1 ebenen Eigenschattengrenzen besitzen. Diese Flächen sind leicht affingeometrisch zu kennzeichnen. Auf einer Fläche $\mathfrak{x}(u,v) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ sei $v = \text{konst.}$ die Schar der ebenen Eigenschattengrenzen; dann ordnet der Berührungszylinder längs einer dieser Kurven die Berührungskurve der benachbarten ebenen Berührungskurve perspektiv-affin zu, wobei die Schnittlinie der Ebenen der beiden Kurven die Perspektivitätsachse und die Lichtrichtung die Richtung der Affinitätsstrahlen bedeutet. Steht insbesondere diese Richtung stets senkrecht auf der jeweiligen Ebene der Kurven $v = \text{konst.}$, so hat man es mit den allgemeinen Mongeschen Gesimsflächen zu tun, deren Gleichungen in die Form

$$x = x_0(v) + p(u)\,(l\cos(\sigma+u) + \lambda\sin(\sigma+u)), \ldots \tag{1}$$

gesetzt werden können, in denen (x_0, y_0, z_0) die Koordinaten einer beliebigen Raumkurve bedeuten, l, m, n und λ, μ, ν die Richtungskosinus ihrer Hauptnormalen und Binormalen, während $p(u)$ eine beliebige Funktion ihres Arguments, σ den Schmiegungswinkel der Kurve bedeutet.

Es liegt daher nahe, die gesuchte Flächenklasse, die bei einer affinen Verallgemeinerung der Erzeugungsweise der Mongeschen Flächen entsteht, als *Affingesimsflächen* zu bezeichnen.

---

[1]) Bestimmung aller Flächen, die von den umgeschriebenen Zylindern in ebenen Kurven berührt werden. Mathemat. Zeitschr. 8 (1920), S. 115–122.

Die Mongeschen Flächen waren dadurch ausgezeichnet, daß sie eine Schar von ebenen geodätischen Linien besitzen, die dann notwendig auch Krümmungslinien sind. Es liegt nahe, zu untersuchen, ob etwa die Affingesimsflächen die Kurven $v =$ konst. als ebene Affinkrümmungslinien besitzen. Eine nähere Untersuchung, welche zeigt, daß diese Eigenschaft, die die Flächen in affingeometrischer Hinsicht als besonders bemerkenswert kennzeichnet, in der Tat einer gewissen Familie von Affingesimsflächen zukommt, läßt sich an eine einfache Parameterdarstellung der Fläche leicht anschließen.

2. Wenn auf der Fläche $x(u,v), \ldots$ die Kurven $v =$ konst. eben sind, so gibt es drei nur von v abhängige Funktionen a, b, c, die die Stellung der Ebenen dieser Kurven charakterisieren derart, daß

$$ax + by + cz = 1 \tag{2}$$

ist. Wenn andererseits längs einer solchen Kurve $v =$ konst. ein Berührungs-*zylinder* existiert, so kann man die Darstellung so einrichten, daß

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \Phi(u,v)\alpha(v), \ldots \tag{3}$$

wird, wobei α, β, γ Funktionen von v allein sind. Dies besagt, daß man als Parameterkurven $u =$ konst. die zu v konjugierten Kurven gewählt hat, Kurven, die längs ein- und derselben v-Kurve parallele Tangenten besitzen.

Differenziert man nun (2) wiederholt nach v, so ergibt sich das folgende System von Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{c} (a'x) + (a\alpha)\Phi(u,v) = 0, \\ (a''x) + 2(a'\alpha)\Phi + (a\alpha')\Phi + (a\alpha)\Phi_v = 0, \\ (a'''x) + 3(a''\alpha)\Phi + 3(a'\alpha')\Phi + (a\alpha'')\Phi + (3(a'\alpha) + 2(a\alpha'))\Phi_v \\ + (a\alpha)\Phi_{vv} = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Die Gleichungen (2) und (4) bilden ein System von vier Gleichungen für $x, y, z, 1$; ihre Determinante muß demnach verschwinden; diese hat nun die Form

$$A\Phi_{vv} + B\Phi_v + C\Phi + D = 0; \tag{5}$$

wobei die Koeffizienten A, B, C, D gewisse Funktionen von v allein bedeuten. Ist nun V_0 eine Partikularlösung dieser Gleichung, V_1, V_2 zwei unabhängige Partikularlösungen der verkürzten Gleichung, so ist die allgemeine Lösung von (6) in der Form

$$\Phi = V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2$$

dargestellt, wobei U_1, U_2 zwei beliebige Funktionen der einen Veränderlichen u bedeuten. Demgemäß erhält man:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2)\alpha, \ldots .$$

Man führe nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(7)\qquad \boxed{\begin{aligned} x_0 &= \int V_0\,\alpha(v)\,dv, \ldots,\\ l &= \int V_1\,\alpha(v)\,dv, \ldots,\\ \lambda &= \int V_2\,\alpha(v)\,dv, \ldots; \end{aligned}}$$

dann wird die gesuchte Fläche in der Form

$$(8)\qquad \boxed{x = x_0 + U_1 l + U_2 \lambda, \ldots}$$

dargestellt, und es ist unmittelbar einleuchtend, daß drei Gleichungen dieser Form, in denen $x_0, \ldots, l, \ldots, \lambda, \ldots$ durch die Gleichungen (7) erklärt sind, stets eine Affingesimsfläche darstellen, welches auch die willkürlichen Funktionen $V_0, V_1, V_2, \alpha, \beta, \gamma$ sein mögen.

3. Die grundlegenden Gleichungen (7) und (8) lassen die affingeometrischen Eigenschaften der betrachteten Flächenklasse leicht erkennen. Es wird:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = U_1' l + U_2' \lambda, \ldots, & \dfrac{\partial x}{\partial v} = (V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2)\,\alpha, \ldots,\\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = U_1'' l + U_2'' \lambda, \ldots,\\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = (U_1' V_1 + U_2' V_2)\,\alpha, \ldots,\\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \Phi_v \alpha + \Phi \alpha', \ldots. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich

$$(10)\qquad \begin{cases} L = (x_{uu}, x_u, x_v) = \Phi \Delta (U_1' U_2'' - U_2' U_1''),\\ M = (x_{uv}, x_u, x_v) = 0,\\ N = (x_{vv}, x_u, x_v) = \Phi^2 (U_1' \mathfrak{B}_1 + U_2' \mathfrak{B}_2), \end{cases}$$

wobei die Determinanten

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta = (\lambda l \alpha),\\ \mathfrak{B}_1 = (\alpha \alpha' l),\\ \mathfrak{B}_2 = (\alpha \alpha' \lambda) \end{cases}$$

Funktionen der einzigen Veränderlichen v sind.

Aus der zweiten Gleichung (10) ergibt sich, daß die Parameterkurven u, v konjugiert sind, eine Tatsache, die auch geometrisch unmittelbar einleuchtet. Jedenfalls ist in der quadratischen Grundform der affinen Differentialgeometrie

$$(12)\qquad e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = \frac{(d^2x, x_u, x_v)}{\sqrt[4]{LN - M^2}}$$

der mittlere Koeffizient

$$f = 0$$

und daher die Christoffelschen Verbindungen dieser Differentialform

13)
$$\begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \frac{e_u}{2e}, & \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{e_v}{2e}; & \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \frac{-g_u}{2e}, \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{e_v}{2g}, & \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{g_u}{2g}, & \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{g_v}{2g}. \end{cases}$$

Diese Beziehungen gestatten leicht, einzusehen, wann die Affinnormalen der Fläche jeweils in den Ebenen $v =$ konst. liegen und demgemäß die Kurven $v =$ konst. Affinkrümmungslinien sind.

4. Der geforderte Nachweis ist erbracht, wenn der Affinnormalvektor $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ als mit $(x_u, \ldots)$ und $(x_{uu}, \ldots)$ komplanar, also in der Ebene $v =$ konst. erkannt ist.

Nach den grundlegenden Gleichungen der Affingeometrie[2]) ist:

14)
$$x_{uu} = \left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \frac{Ag - Bf}{eg - f^2}\right) x_u + \left(\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} + \frac{Be - Af}{eg - f^2}\right) x_v - e\tilde{x}, \ldots,$$

wobei A und B die ersten beiden Koeffizienten der kubischen Grundform bedeuten. In unserem Falle ist nun:

$$(x_{uuv}, x_u, x_v) \equiv 0 \qquad f = 0,$$

also

$$B = \frac{(x_{uuv}, x_u, x_v)}{\sqrt{|eg - f^2|}} - \frac{1}{2} e_v - f_u$$

$$= -\frac{1}{2} e_v.$$

Somit verschwindet auf der rechten Seite der Gleichung (14) der Koeffizient von x_v, wenn $e_v = 0$ ist, eine Tatsache, die nichts anderes besagt, als daß die Affinnormalen der Fläche in den Ebenen der Eigenschattengrenzen $v =$ konst. liegen.

Bei den Affingesimsflächen, bei denen die quadratische Fundamentalform die Gestalt $du^2 + g\,dv^2$ annimmt, liegen die Affinnormalen in den Ebenen der ebenen Eigenschattengrenzen; diese Kurven bilden daher die eine Schar der Affinkrümmungslinien.

Da die Affinkrümmungslinien einer Fläche immer ein konjugiertes Netz bilden, so ergibt sich, daß die Kurven $u =$ konst. die zweite Schar der Affinkrümmungslinien bilden.

---

[2]) Radon: Über affine Geometrie XVI. Leipz. Ber. 1918, S. 96.

5. Ist u die Affinlänge der Kurve (U_1, U_2), aus der die Meridiankurve durch die affine Transformation (8) hervorgeht, so wird

$$U_1' U_2'' - U_2' U_1'' = 1$$

und damit

$$L = (V_0 + V_1 U_1 + V_2 U_2) \Delta.$$

Im allgemeinen wird die Affinnormale der Meridiankurve nicht mit der Affinnormale der Fläche zusammenfallen; damit dies eintritt, muß

$$\tilde{x} = t x_{uu}, \ldots$$

werden. Nun können aber die drei Gleichungen

$$x_{uu}\left(t - \frac{1}{e}\right) - \frac{e_u}{e} x_u - \frac{e_v}{e} x_v = 0$$

nur durch die Werte

$$t = \frac{1}{e} \qquad e_u = e_v = 0$$

befriedigt werden, d. h. es muß

$$e = \text{konst.}$$

sein. Bei der eben getroffenen Wahl des Parameters u nehmen aber die Koeffizienten der kubischen Grundform die Werte an:

$$A = -\frac{3}{2} e_u \qquad B = -\frac{1}{2} e_v$$

$$C = +3g\frac{e_u}{2e} \qquad D = g\frac{e_v}{2e}.$$

Für die gesuchten Flächen verschwinden diese Größen identisch, daraus folgt nach einem Pickschen Satze:

Die einzigen Affingesimsflächen, deren Affinnormalen mit den Affinnormalen ihrer Meridiankurven zusammenfallen, sind die Flächen zweiter Ordnung.

Hannover, den 24. Oktober 1922.

(Eingegangen am 26. Oktober 1922.)

Über einen Grenzwertsatz.

Von

Oskar Perron in München.

I. In einer früheren Arbeit habe ich u. a. den folgenden Satz bewiesen[1]):

Aus den Beziehungen

A) $$f^{(n)}(x) + a_1 f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n f(x) = \varphi(x),$$

B) $$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = b$$

kann, wenn die Wurzeln der Gleichung

C) $$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

sämtlich negativ sind, und wenn $\varphi(x)$ für genügend große x stetig ist, geschlossen werden:

D) $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{b}{a_n}, \\ \lim\limits_{x \to \infty} f^{(\nu)}(x) = 0 \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

In der damals unmittelbar vorausgehenden am gleichen Tag verfaßten Note „Zur Theorie der divergenten Reihen“ habe ich von diesem Satz den Spezialfall $n = 1$, $a_n = 1$ als Hilfssatz gebraucht und entsprechend bewiesen. In der Formulierung dieses Hilfssatzes (nicht aber des vorerwähnten allgemeineren Satzes) ist aber versehentlich die Voraussetzung, daß $\varphi(x)$ stetig sein soll, oder, was für $n = 1$ auf dasselbe hinauskommt, daß $f'(x)$ stetig sein soll, weggelassen worden. Von Herrn Landau darauf aufmerksam gemacht, habe ich diese von mir bewußt gewollte Voraussetzung in meinen noch nicht verschickten Sonderdrucken handschrift-

[1]) Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen. Mathem. Zeitschrift 6 (1919), S. 161—166. Der Satz ist ein Teil von dem dortigen Satz 1, S. 161.

lich nachgetragen. Neuere Arbeiten[2]) haben mich nun veranlaßt, die Frage zu prüfen, ob nicht mein Satz auch ohne die Voraussetzung der Stetigkeit von $\varphi(x)$ richtig ist, und ob mein Beweis sich nicht so modifizieren läßt, daß diese Voraussetzung entbehrt werden kann.

Es zeigte sich, *daß in der Tat die Worte „und wenn $\varphi(x)$ für genügend große x stetig ist" in obigem Satz gestrichen werden dürfen*, und zwar ist es mir gelungen, den Beweis jetzt so einfach zu gestalten, daß der Satz fast selbstverständlich scheinen möchte.

Die n negativen Wurzeln der Gleichung (C) seien

$$-\sigma_1, -\sigma_2, \ldots, -\sigma_n.$$

Führt man dann wie früher der Reihe nach die folgenden Funktionen ein, wobei $f_1(x) = f(x)$ sein soll:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1'(x) + \sigma_1 f_1(x) = f_2(x), \\ f_2'(x) + \sigma_2 f_2(x) = f_3(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1}'(x) + \sigma_{n-1} f_{n-1}(x) = f_n(x), \\ f_n'(x) + \sigma_n f_n(x) = f_{n+1}(x), \end{cases}$$

so ist wegen (A) offenbar $f_{n+1}(x) = \varphi(x)$, und also wegen (B)

$$(2)\qquad \lim_{x\to\infty} f_{n+1}(x) = b.$$

Nun ist nach dem auch früher von mir benutzten Stolzschen Satz[3])

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sigma_n x} f_n(x)}{e^{\sigma_n x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sigma_n x}[f_n'(x) + \sigma_n f_n(x)]}{\sigma_n e^{\sigma_n x}},$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert. Das tut er aber, und zwar ist er gleich $\frac{b}{\sigma_n}$, wie sich aus der letzten Gleichung (1) in Verbindung mit (2) sofort ergibt; also ist auch

$$(3)\qquad \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \frac{b}{\sigma_n},$$

---

[2]) Haupt, O.: Über Asymptoten ebener Kurven. Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik **152** (1922), S. 6–10, sowie eine demnächst im gleichen Journal erscheinende Ergänzung dieser Arbeit.

[3]) Dieser lautet: Wenn $\Phi(x)$ reell und $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$, so ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{\Phi'(x)},$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert. Man beachte, daß dabei keineswegs etwa die Stetigkeit der Ableitungen zu fordern ist.

und daher weiter wegen der letzten Gleichung (1)

$$\lim_{x\to\infty} f_n'(x) = 0. \tag{4}$$

Ebenso wie die Gleichungen (3) und (4) soeben aus der letzten Gleichung (1) in Verbindung mit (2) gefolgert wurden, läßt sich aus der vorletzten Gleichung (1) in Verbindung mit (3) folgern:

$$\lim_{x\to\infty} f_{n-1}(x) = \frac{b}{\sigma_n \sigma_{n-1}}, \qquad \lim_{x\to\infty} f_{n-1}'(x) = 0,$$

und so fortschließend findet man die folgende Kette von n Gleichungspaaren:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \dfrac{b}{\sigma_n}, & \lim\limits_{x\to\infty} f_n'(x) = 0, \\
\lim\limits_{x\to\infty} f_{n-1}(x) = \dfrac{b}{\sigma_n \sigma_{n-1}}, & \lim\limits_{x\to\infty} f_{n-1}'(x) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = \dfrac{b}{\sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2}, & \lim\limits_{x\to\infty} f_2'(x) = 0, \\
\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = \dfrac{b}{\sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1}, & \lim\limits_{x\to\infty} f_1'(x) = 0.
\end{array}\right. \tag{5}$$

Das letzte dieser Gleichungspaare ist aber gleichbedeutend mit:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{b}{a_n}, \qquad \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0,$$

und aus den jeweils zweiten Gleichungen der vorausgehenden Zeilen schließt man von unten angefangen der Reihe nach mit Rücksicht auf (1):

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0, \ldots, \lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x) = 0.$$

Damit ist der Beweis beendet.

II. Der Stolzsche Satz gilt auch dann, wenn in Fußnote [3]) der rechts stehende Grenzwert gleich ∞ ist. Wenn daher an Stelle der Voraussetzung (B) die tritt, daß

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$$

ist, so kann daraus analog zu (3) gefolgert werden:

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty,$$

während die Gleichung (4) offenbar nicht gefolgert werden kann. Man erhält daher durch die analogen Schlüsse von den Gleichungspaaren (5) immer nur die links stehenden Gleichungen, wobei aber deren rechte

Seiten durch das Zeichen ∞ zu ersetzen sind. Die letzte dieser Gleichungen lautet also, da ja $f_1(x) = f(x)$ ist:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

und somit gewinnt man den weiteren Satz:

Aus der Beziehung

$$\lim_{x \to \infty} [f^{(n)}(x) + a_1 f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n f(x)] = \infty$$

kann, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

sämtlich negativ sind, stets gefolgert werden:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

(Eingegangen am 10. November 1922.)

Bilineare Transformation quadratischer Formen.

Von

H. Brandt in Aachen.

1. Bei den quadratischen Formen mit 2, 4 und 8 Variablen (und nur bei diesen) ist es bekanntlich möglich, von drei beliebigen Formen (gleicher Variablenzahl), deren Determinanten nicht verschwinden, eine bilinear in das Produkt der beiden anderen zu transformieren[1]). Die bilinearen Substitutionen, die bei dieser Transformationsaufgabe auftreten, besitzen merkwürdige Eigenschaften, von denen ich im folgenden auf eine meines Wissens bisher noch nicht bemerkte hinweisen möchte, welche trotz ihres elementaren Charakters eine auffallende Eleganz zeigt. Wir dürfen dabei, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, die Determinanten der drei Formen als gleich annehmen, weil das andernfalls, sofern nur keine der Determinanten verschwindet, ohne Änderung der bilinearen Substitution durch Multiplikation der Formen mit geeigneten Faktoren erreicht werden kann[2]).

Wir bezeichnen durch $n = 2\nu$ eine der Zahlen 2, 4 oder 8 und werden die Beweise gemeinsam führen, ohne uns damit aufzuhalten, daß manche Aussagen für $n = 2$ trivial werden. Für quadratische Formen mit n Variablen, deren Determinanten stets den gleichen Wert D haben sollen, verwenden wir die Symbole $A((x))$, $B((y))$ usw.; dabei sind die Variablen von $A((x))$ $x_1, \ldots, x_n$, die von $B((y))$ $y_1, \ldots, y_n$ usw. Der Wurzelwert $d = \sqrt[\nu]{D}$ sei beliebig, aber fest gewählt. Die Adjungierte von $A((x))$ soll dann nach Division ihrer Koeffizienten durch $d^{\nu-1}$ mit $\mathfrak{A}((x))$ bezeichnet und *Reziproke* genannt werden. Offenbar hat $\mathfrak{A}$ ebenfalls die

[1]) Hurwitz, A.: Über die Komposition der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variablen. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen 1898, S. 309–316.

[2]) Brandt, H.: Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen. Journal für reine und angewandte Mathematik **143** (1913) (im folgenden nur durch Seitenangabe zitiert), S. 108, Note.

Determinante D und besitzt A zur Reziproken, so daß wir auch von *einander reziproken Formen* wie A und $\mathfrak{A}$ oder B und $\mathfrak{B}$ sprechen können[3]).

2. Sind $A((x))$, $B((y))$, $C((z))$ quadratische Formen mit n Variablen und der gleichen, nicht verschwindenden Determinante D, und ist

$$(I) \qquad x_i = \sum_{jk} p_{ijk} y_j z_k$$

eine bilineare Substitution[4]) — wir bezeichnen sie durch P — für welche die Gleichung

$$(II) \qquad A((x)) = B((y))\, C((z))$$

identisch besteht, so wollen wir kurz sagen: P macht identisch $A = BC$. Dabei ist aber auf die Reihenfolge der Formen zu achten.

Aus P entstehen durch zyklische Vertauschung der drei Indexreihen die beiden neuen bilinearen Substitutionen

$$y_i = \sum_{jk} p_{kij} z_j x_k, \qquad z_i = \sum_{k} p_{jki} x_j y_k.$$

Wir bezeichnen sie durch P' und P'' und nennen sie die *erste* und *zweite Transponierte* von P. Dann sind unter Beachtung der Reihenfolge P'', P die Transponierten von P' und P, P' die Transponierten von P''. Nach elementaren Sätzen über die Transformation quadratischer Formen macht P' identisch $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A}$ und P'' identisch $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}B$, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die beziehungsweise zu A, B, C reziproken Formen bezeichnen[5]).

Aus den bilinearen Substitutionen P, P', P'' lassen sich dreierlei Linearformen herleiten:

$$\sum_{j} p_{jik} x_j, \qquad \sum p_{kji} y_j, \qquad \sum_{i} p_{ikj} z_j.$$

Die aus ihnen gebildeten Matrizen, bei welchen sich der Index i auf die Zeilen, der Index k auf die Spalten bezieht, sollen *erstes, zweites und drittes Linearformsystem* von P genannt und durch $\pi(x)$, $\mathfrak{p}(y)$, $p(z)$ bezeichnet werden. Die Werte ihrer Determinanten sind

$$|\pi(x)| = \varepsilon_1 [\mathfrak{A}((x))]^{\nu}, \qquad |\mathfrak{p}(y)| = \varepsilon_2 [B((y))]^{\nu}, \qquad |\mathfrak{p}(z)| = \varepsilon_3 [C((z))]^{\nu},$$

wo ε_1, ε_2, ε_3 Vorzeichen bedeuten, und die $n-1$-reihigen Unterdeterminanten sind bzw. durch $[\mathfrak{A}((x))]^{\nu-1}$, $[B((y))]^{\nu-1}$, $[C((z))]^{\nu-1}$ teilbar[6]).

---

[3]) Bei der hier auch möglichen Annahme $d = \sqrt[\nu]{-D}$ würden die Sätze der Nummern 9 und 10 nicht mehr gelten.

[4]) Die Indizes laufen hier wie im folgenden, einerlei ob darüber summiert wird oder nicht, immer von 1 bis n.

[5]) S. 110.

[6]) S. 109—111.

3. Entfernt man diese Teiler, mit den Vorzeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ genommen, aus den Systemen der Unterdeterminanten, so können die entstehenden Matrizen, welche die Variablen nur noch in der ersten Potenz enthalten, bzw. als erstes, zweites und drittes Linearformsystem von drei neuen bilinearen Substitutionen Q, R, S angesehen werden. Bezeichnet man sie daher durch

$$\| \sum q_{jik} x_j \| = \varkappa(x), \qquad \| \sum_j r_{kji} y_j \| = \mathfrak{r}(y), \qquad \| \sum s_{ikj} z_j \| = s(z),$$

so bestehen wegen der bekannten Eigenschaften der Unterdeterminanten die drei ersten der folgenden sechs Matrizengleichungen:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \pi(x)\,\dot{\varkappa}(x) = \mathfrak{A}((x)), & \mathfrak{p}(y)\,\dot{\mathfrak{r}}(y) = B((y)), & p(z)\,\dot{s}(z) = C((z)) \\ \varrho(x)\,\dot{\sigma}(x) = A((x)), & \mathfrak{s}(y)\,\dot{\mathfrak{q}}(y) = \mathfrak{B}((y)), & q(z)\,\dot{r}(z) = \mathfrak{C}((z)), \end{cases}$$

während die drei letzten sogleich hergeleitet werden sollen. Dabei bezeichnet der Punkt die transponierte (gewöhnliche lineare) Substitution. Jede dieser Gleichungen kann auch noch auf drei andere Weisen geschrieben werden, z. B. gilt bei der ersten:

$$\pi(x)\,\dot{\varkappa}(x) = \dot{\varkappa}(x)\,\pi(x) = \dot{\pi}(x)\,\varkappa(x) = \varkappa(x)\,\dot{\pi}(x) = \mathfrak{A}((x)).$$

Mit Hilfe der bilinearen Substitutionen S und R nehmen die Auflösungen der Gleichungen (I) nach den y_i oder z_i die folgende Gestalt an:

$$\text{(IV)} \qquad C((z))\,y_i = \sum_{jk} s_{kij} z_j x_k, \qquad B((y))\,z_i = \sum_{jk} r_{jki} x_j y_k.$$

Führt man das zweite dieser Gleichungssysteme in das erste ein, so erhält man unter Beachtung der hierbei gültigen Identität (II) die Formeln:

$$\sum_j \sum_{\alpha\beta} r_{\alpha\mu j}\, s_{\beta\nu j}\, x_\alpha\, x_\beta = \begin{matrix} A((x)) \\ 0 \end{matrix} \text{ wenn } \begin{matrix} \mu = \nu \\ \mu \gtrless \nu \end{matrix},$$

d. h. die vierte der Gleichungen (III). Die beiden letzten entstehen auf ähnliche Weise, wenn man von P' mit der Identität $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A}$ und P'' mit der Identität $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}B$ ausgeht. Damit ist das Gleichungssystem (III) vollständig hergeleitet.

4. Aus dem Bestehen der Identität (II) vermöge der Gleichungen (IV) schließt man, daß die bilinearen Substitutionen

$$y_i = \sum_{jk} s_{kij} z_j x_k, \qquad z_i = \sum_{jk} r_{jki} x_j y_k,$$

die nach dem obigen durch S' und R'' zu bezeichnen sind, die Gleichungen

$$B((y)) = C((z))\,A((x)), \qquad C((z)) = A((x))\,B((y))$$

identisch befriedigen. Wir nennen nach einer früheren Bezeichnung S' die

erste und R'' die *zweite Koordinierte* von P.[7]) Die beiden Gleichungen des Systems (III)

$$p(z)\,\dot{s}(z) = C((z)), \qquad \mathfrak{p}(y)\,\dot{\mathfrak{r}}(y) = B((y))$$

können als Definition für die erste Koordinierte S' und die zweite Koordinierte R'' von P angesehen werden. Jedoch wird die früher nachgewiesene Symmetrie, welche zwischen den drei bilinearen Substitutionen P, S', R'' besteht, daraus nicht unmittelbar erkannt. Um sie zur Darstellung zu bringen, wollen wir die oben für die Linearformsysteme von P eingeführte Bezeichnung auf die transponierten bilinearen Substitutionen ausdehnen. Wir haben dann $\pi(x)$, $\mathfrak{p}(y)$, $p(z)$ in bezug auf P' als drittes, erstes und zweites, und in bezug auf P'' als zweites, drittes und erstes Linearformsystem anzusehen, was wir ausdrücken, wenn wir setzen:

$$\pi(x) = p'(x) = \mathfrak{p}''(x), \quad \mathfrak{p}(y) = \pi'(y) = p''(y), \quad p(z) = \mathfrak{p}'(z) = \pi''(z).$$

Entsprechendes gilt für die bilinearen Substitutionen Q, R, S. Darnach lassen sich die Definitionsgleichungen für die beiden Koordinierten von P zu den Substitutionen S' und R'' direkt in Beziehung setzen, indem man sie in die Gestalt

$$p(z)\,\dot{\mathfrak{s}}'(z) = C((z)), \qquad \mathfrak{p}(y)\,\dot{r}''(y) = B((y))$$

bringt. Weil nach der zweiten Gleichung auch $r''(y)\,\dot{\mathfrak{p}}(y) = B((y))$, so ist P die erste Koordinierte von R'', und weil nach (III) $\varrho(x)\,\dot{o}(x) = A((x))$, d. h. $s'(x)\,\dot{\mathfrak{r}}''(x) = A((x))$, so ist R'' die erste Koordinierte von S'. Wir erkennen also von neuem, daß P, S', R'' ein symmetrisches Tripel bilden, bei dem keine der bilinearen Substitutionen vor den anderen ausgezeichnet ist. In zyklischer Aufeinanderfolge ist jede der Substitutionen die erste Koordinierte der vorhergehenden und die zweite Koordinierte der nachfolgenden. Solcher Tripel gibt es noch drei weitere, wie die folgenden Gleichungen erkennen lassen:

$$\begin{array}{lll}
s'(x)\,\dot{\mathfrak{r}}''(x) = A((x)), & r''(y)\,\dot{\mathfrak{p}}(y) = B((y)), & p(z)\,\dot{\mathfrak{s}}'(z) = C((z)), \\
r'(x)\,\dot{\mathfrak{s}}''(x) = A((x)), & s''(y)\,\dot{\mathfrak{q}}(y) = \mathfrak{B}((y)), & q(z)\,\dot{\mathfrak{r}}'(z) = \mathfrak{C}((z)), \\
q'(x)\,\dot{\mathfrak{p}}''(x) = \mathfrak{A}((x)), & p''(y)\,\dot{\mathfrak{r}}(y) = B((y)), & r(z)\,\dot{\mathfrak{q}}'(z) = \mathfrak{C}((z)), \\
p'(x)\,\dot{\mathfrak{q}}''(x) = \mathfrak{A}((x)), & q''(y)\,\dot{\mathfrak{s}}(y) = \mathfrak{B}((y)), & s(z)\,\dot{\mathfrak{p}}'(z) = C((z)),
\end{array}$$

welche sämtlich wie die eben gefundenen der ersten Zeile aus den Gleichungen (III) durch veränderte Schreibweise hervorgehen.

Wir haben daher die folgenden *vier Tripel koordinierter bilinearer Substitutionen*: S', R'', P; R', S'', Q; Q', P'', R; P', Q'', S.

[7]) S. 114.

5. Übrigens können die letzten drei Tripel auch aus dem ersten hergeleitet werden. Weil nämlich einer zyklischen Vertauschung der Indexreihen von P eine zyklische Vertauschung von Q, R, S entspricht, wobei nur auch die Akzente entsprechend gesetzt werden müssen, so daß die Beziehungen von P zu Q, R, S analog sind wie die von P' zu R', S', Q' oder von P'' zu S'', Q'', R'', so bilden mit P, S', R'' auch P', Q'', S und P'', R, Q' ein Tripel koordinierter Substitutionen, und weil in jeder der Gleichungen (III) die Buchstaben vertauscht werden dürfen, d. h. die Beziehungen zwischen je zweien der vier bilinearen Substitutionen P, Q, R, S wechselseitig gleich sind, so ist, weil z. B. R'' die erste Koordinierte von S' ist, auch S'' die erste Koordinierte von R' usw., weshalb auch R', S'', Q ein Tripel koordinierter bilinearer Substitutionen bilden.

Wir wollen die zwölf bilinearen Substitutionen mit den durch sie vermittelten Identitäten noch einmal in einem Schema zusammenfassen.

$*$	P $A = BC$	S' $B = CA$	R'' $C = AB$
Q $A = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$	$*$	S'' $\mathfrak{C} = A\mathfrak{B}$	R' $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}A$
Q' $B = \mathfrak{C}\mathfrak{A}$	P'' $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}B$	$*$	R $\mathfrak{A} = B\mathfrak{C}$
Q'' $C = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$	P' $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A}$	S $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}C$	$*$

Hier stehen in den Zeilen Tripel koordinierter und in den Spalten Tripel transponierter bilinearer Substitutionen. Die Reihenfolge ist dabei in den Zeilen und Spalten abwechselnd richtig und verkehrt.

6. Nach dem Vorhergehenden ist klar, daß die beiden Operationen: Bildung der ersten Transponierten und Bildung der ersten Koordinierten, von denen die erste durch ϑ und die zweite durch ω bezeichnet werden möge, in beliebiger Reihenfolge, abwechselnd oder wiederholt angewandt, von irgendeiner der zwölf bilinearen Substitutionen immer nur zu einer der übrigen oder auch der ursprünglichen führen. Zugleich ist ersichtlich, daß dadurch auch jede der übrigen, sogar auf unendlich viele verschiedene Weisen erhalten werden kann. Es steht aber nichts im Wege, die sämtlichen Verbindungen von ϑ und ω, welche dasselbe Resultat ergeben, als eine einzige Operation anzusehen, was den Bedingungen $\vartheta^3 = 1$, $\omega^3 = 1$, $\omega\vartheta^2 = \vartheta\omega^2 (= \varphi)$, $\omega^2\vartheta = \vartheta^2\omega (= \psi)$, $\vartheta\omega\vartheta = \vartheta^2\omega^2\vartheta^2$, d. h. $\varphi\psi = \psi\varphi$

gleichkommt. Die damit definierten zwölf Operationen, welche von einer willkürlichen zu den sämtlichen bilinearen Substitutionen führen, bilden dann offensichtlich eine Gruppe. Diese Gruppe enthält, wenn wir, um die Bezeichnung festzulegen, etwa von P ausgehen, die identische Operation $(P, P) = 1$, drei Operationen der Periode 2, nämlich $(P, Q) = \varphi\psi$, $(P, R) = \psi$, $(P, S) = \varphi$ und noch acht Operationen der Periode 3, welche durch Zusammensetzung der bisherigen mit ϑ oder ϑ^2 entstehen. Die ersten vier Operationen bilden für sich eine Gruppe, die Vierergruppe; wie man schon aus den Gleichungen (III) hätte unmittelbar entnehmen können, die ganze Gruppe ist aber, wie ihr Aufbau erkennen läßt, nichts anderes wie die alternierende Gruppe 4. Grades, welche mit der Gruppe der Drehungen des regulären Tetraeders identisch ist.

7. Daher ist auch das Tetraeder besonders geeignet, die Beziehungen zwischen den zwölf bilinearen Substitutionen zu veranschaulichen. Schreibt man nämlich an die Kanten einer Seite in einer willkürlichen Reihenfolge, die aber einmal gewählt, einen Umlaufsinn für das Tetraeder bestimmt, die Buchstaben A, B, C und an die Gegenkanten entsprechend $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist zunächst ersichtlich, daß die Formentripel aus den durch die zwölf bilinearen Substitutionen vermittelten Identitäten, wie sie in dem obigen Schema zusammengestellt sind, gerade auf den vier Tetraederseiten, und zwar in der durch den Umlaufsinn bestimmten richtigen Reihenfolge vorkommen. Man kann also die zwölf bilinearen Substitutionen so auf die zwölf Winkelfelder verteilen, daß jede Substitution die gegenüberstehende Form in das Produkt der benachbarten transformiert. Jetzt stehen die vier Tripel koordinierter Substitutionen auf den vier Seiten, wobei die Reihenfolge mit dem Umlaufsinn des Tetraeders übereinstimmt. Dagegen stehen die vier Tripel transponierter Substitutionen an den vier Ecken in einer Anordnung, die dem Umlaufsinn der Gegenseite entspricht, so daß also beim Anblick des Tetraeders eine Ecke den entgegengesetzten Drehsinn zeigt wie eine Seite. Das Tetraeder bringt die Beziehungen zwischen den zwölf bilinearen Substitutionen in der schönsten Weise zum Ausdruck und zeigt vor allem deutlich, daß keine der Substitutionen vor den andern ausgezeichnet ist.

Wegen der Beziehungen zur Tetraedergruppe wollen wir das System der zwölf bilinearen Substitutionen auch als *tetraedrales System* bezeichnen.

8. Bisweilen ist die Frage von Interesse, wie sich das tetraedrale System bei linearen Transformationen verhält. Wir wollen dabei die Betrachtung auf den besonders wichtigen Fall beschränken, daß die Determinanten der Substitutionen den gleichen nicht verschwindenden Wert haben. Werden die Variablenreihen der bilinearen Substitution (I) und damit auch die der drei Formen A, B, C der Reihe nach durch die linearen Substitutionen t, u, v

transformiert, so sagen wir kurz: P wird durch t, u, v transformiert. Ist dann $|t| = |u| = |v| = \Delta$ und bezeichnet $\delta = \sqrt[\nu]{\pm \Delta}$ einen bestimmten dieser Wurzelwerte, so sollen die zu t, u, v adjungierten Substitutionen nach Division durch $\delta^{\nu-1}$ mit $\mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ bezeichnet werden. Eine einfache Überlegung, die wir der Kürze wegen unterdrücken, zeigt dann folgendes: Wird P durch t, u, v transformiert, so transformiert sich Q durch $t, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, R durch $\mathfrak{t}, u, \mathfrak{v}$ und S durch $\mathfrak{t}, \mathfrak{u}, v$, ferner werden die Transformationen der koordinierten Substitutionen einfach durch zyklische Vertauschung der drei betreffenden linearen Substitutionen gefunden, so daß z. B. S' durch u, v, t und R'' durch v, t, u transformiert wird. Will man die linearen Substitutionen noch in dem Schema der Nr. 7 eintragen, so hat man nur die Substitutionen $t, u, v, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ den Formen $A, B, C, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ entsprechend zuzuordnen. Die verschiedenen Bestimmungen von δ sind dabei paarweise den verschiedenen Bestimmungen der neuen reziproken Formen zugehörig.

9. Bei beliebigen linearen Transformationen mit gleichen Determinanten bleiben, wie man aus dem vorigen erkennt, die drei Vorzeichen, welche in den Determinanten der Linearformsysteme der einzelnen bilinearen Substitutionen auftreten (siehe für P die Formeln am Schlusse der Nr. 2), invariant. Durch solche Transformationen läßt sich aber erreichen, daß $A = B = C = E$ wird, wobei $E((x)) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. In diesem Falle erkennt man leicht, daß das Produkt der drei Vorzeichen nur den Wert -1 haben kann[8]). Das gilt dann wegen der vorigen Bemerkung auch in jedem andern Falle. Daher ist durch das zweite und dritte Vorzeichen das erste schon mitbestimmt. Je nachdem bei der bilinearen Substitution (I) jene beiden Vorzeichen die Werte $++$, $--$, $+-$, $-+$ haben, schreiben wir der durch sie vermittelten bilinearen Transformation (II) positive, negative, positiv-negative oder negativ-positive *Signatur* zu. Der Kürze wegen sei es gestattet, auch von der Signatur von P selbst zu sprechen[9]).

10. Im tetraedralen System haben die bilinearen Substitutionen, die wir oben in derselben Weise akzentuiert haben, stets dieselbe Signatur. Das ergibt sich, wenn man die Formen A, B, C durch unimodulare Substitutionen[10]) auf die Gestalt fE transformiert, wo E die vorige Bedeutung hat. Durch die adjungierten unimodularen Substitutionen gehen nämlich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gleichzeitig in $f'E$ über, wobei nach unsern Festsetzungen über reziproke Formen $f' = \varepsilon f$ und $\varepsilon^\nu = 1$ ist. Für das transformierte

[8]) S. 116.

[9]) Bei Beschränkung auf reelle Koeffizienten der Formen und Substitutionen ist die Signatur für $n = 4$ oder 8 durch P allein ohnehin schon bestimmt.

[10]) Das heißt solche mit der Determinante $+1$.

tetraedrale System ergeben dann die Gleichungen (III), daß $R = S = P$ und $Q = \varepsilon P$ wird, so daß P, Q, R, S gewiß dieselbe Signatur besitzen[11]). Weil nun durch unimodulare Substitutionen die Signatur nicht geändert werden kann, so gilt das auch in dem ursprünglichen tetraedralen System, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

11. Im tetraedralen System können alle zwölf bilinearen Substitutionen identisch werden, wobei dann offenbar die Signatur negativ sein muß. Ich gebe dafür den Fällen $n = 2$, 4 und 8 entsprechend drei Beispiele. Dabei ist zur Abkürzung gesetzt $\alpha\beta = y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha$, $(\alpha\beta) = y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha$.

1. $x_1 = \overline{12}, \qquad x_2 = y_1 z_1 - y_2 z_2$.
2. $x_1 = \overline{14} + (23), \quad x_2 = \overline{24} + (31), \quad x_3 = \overline{34} + (12),$
$$x_4 = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 - y_4 z_4 .$$
3. $x_1 = \overline{18} + (23) + (45) + (67), \quad x_2 = \overline{28} + (64) + (57) + (31),$
$x_3 = \overline{38} + (47) + (12) + (56), \quad x_4 = \overline{48} + (51) + (26) + (73),$
$x_5 = \overline{58} + (72) + (63) + (14), \quad x_6 = \overline{68} + (35) + (71) + (42),$
$x_7 = \overline{78} + (16) + (34) + (25), \quad x_8 = y_1 z_1 + \ldots + y_7 z_7 - y_8 z_8$.

12. Am einfachsten zu übersehen ist natürlich das tetraedrale System im Fall $n = 2$. Schreibt man die ganz beliebige[12]) bilineare Substitution P in der folgenden Weise:

$$x_1 = -\alpha y_1 z_1 + \gamma' y_1 z_2 + \beta' y_2 z_1 + \delta y_2 z_2,$$
$$x_2 = \quad \delta' y_1 z_2 + \beta y_1 z_2 + \gamma y_2 z_1 - \alpha' y_2 z_2,$$

und nimmt der größeren Symmetrie wegen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$, d. h. die Signatur negativ an, so zeigt sich, daß die sämtlichen Substitutionen des tetraedralen Systems einfach dadurch erhalten werden, daß man die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für sich und jedesmal in derselben Weise die Koeffizienten $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ für sich permutiert. Dabei sind die in Betracht kommenden Permutationen die sämtlichen geraden Permutationen von vier Elementen, wodurch der Zusammenhang des tetraedralen Systems mit der alternierenden Gruppe 4. Grades in Evidenz gesetzt ist. Man findet nämlich $(P, P) = 1$, $(P, Q) = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$, $(P, R) = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$, $(P, S) = (\alpha\gamma)(\beta\delta)$, $(P, P') = (\beta\gamma\delta)$, $(P, P'') = (\beta\delta\gamma)$, $(P, S') = (\alpha\gamma\beta)$, $(P, R'') = (\alpha\beta\gamma)$, $(P, R') = (\alpha\beta\delta)$, $(P, Q'') = (\alpha\delta\beta)$, $(P, Q') = (\alpha\delta\gamma)$, $(P, S'') = (\alpha\gamma\delta)$.

[11]) Wenn die Koeffizienten der Formen und Substitutionen reell und die Formen A, B, C positiv definit sind, so wird man auch die reziproken Formen positiv annehmen, so daß $\varepsilon = 1$ und dann auch $Q = P$ wird.

[12]) Die Voraussetzungen unserer Problemstellung (Nr. 2) erfordern nur die Bedingung, daß der Ausdruck $D = \alpha^2\alpha'^2 + \beta^2\beta'^2 + \gamma^2\gamma'^2 + \delta^2\delta'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - 2\alpha\alpha'\gamma\gamma' - 2\alpha\alpha'\delta\delta' - 2\beta\beta'\gamma\gamma' - 2\beta\beta'\delta\delta' - 2\gamma\gamma'\delta\delta' - 4\alpha\beta\gamma\delta - 4\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ nicht verschwinde.

(Eingegangen am 16. November 1922.)

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von der

Schriftleitung der „Naturwissenschaften"

Soeben erschien der erste Band

mit 35 Abbildungen (IV, 403 S.) Lexikonformat

GZ. 12.5; gebunden GZ. 14.

Die Bezieher der „Naturwissenschaften" haben das Recht, die „Ergebnisse" zu einem dem Ladenpreis gegenüber um 10% ermäßigten Vorzugspreise zu beziehen.

INHALTSÜBERSICHT:

Die Fortschritte der Astronomie im Jahre 1921, von Dr. R. Prager, Neubabelsberg.
Die Relativitätstheorie, von Professor Dr. Hans Thirring, Wien.
Statistische Mechanik, von Professor Dr. Paul Hertz, Göttingen.
Neuere Untersuchungen über kritische Zustände rasch umlaufender Wellen, von Professor Dr. R. Grammel, Stuttgart. Mit 15 Abbildungen.
Der Nernstsche Wärmesatz, von Professor Dr. A. Eucken, Breslau. Mit 2 Abbildungen.
Wärmestrahlung, von Professor Dr. F. Henning, Lichterfelde.
Kontaktpotential, von Professor Dr. Alfred Coehn, Göttingen.
Chemische Kinetik, von Professor Dr. Max Bodenstein, Hannover.
Photochemie, von Professor Dr. Max Bodenstein, Hannover.
Die neuen Wandlungen der Theorie der elektrolytischen Dissoziation, von Oberregierungsrat Dr. Friedrich Auerbach, Berlin. Mit 1 Abbildung.
Röntgenstrahlenspektroskopie, von Professor Dr. M. v. Laue, Berlin-Zehlendorf. Mit 1 Abbildung.
Fortschritte im Bereich der Kristallstruktur, von Professor Dr. A. Johnsen, Berlin.
Fortschritte der Atom- und Spektraltheorie, von Dr. Gregor Wentzel, München. Mit 3 Abbildungen.
Stand der Theorie der Bandenspektren, von Professor Dr. A. Kratzer, Münster. Mit 4 Abbildungen.
Lichtelektrische Wirkung und Photolumineszenz, von Professor Dr. Peter Pringsheim, Berlin.
Das periodische System der chemischen Elemente, von Professor Dr. Fritz Paneth, Berlin. Mit 6 Abbildungen.

Die Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwertungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vervielfacht den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Assier de Pompignan. Note sur le calcul tensoriel. Paris, J. Hermann. 32 S. gr. 8°. 1923.

Born, Max, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Elementar dargestellt. Dritte, verbesserte Auflage. Berlin, Springer. 1922.

M. de Broglie, Exposé concernant les résultats actuels relatifs aux éléments isotopes, Publications de la société de chimie-physique. XI. Paris, J. Hermann. 15 S. 8°. 1922.

P. Drumaux, L'évidence de la théorie d'Einstein. Paris, J. Hermann. 72 S. gr. 8°. 1923.

R. Henseling, Astronomie für Alle. I. Sternhimmel und Menschheit. Franckhsche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart. 80 S. gr. 8°. 1923.

R. Henseling, Sternbüchlein 1923. Mit einer zweifarbigen Planetentafel und 39 Bildern. Franckhsche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart. 88 S. kl. 8°. 1923.

E. E. Neumann, Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie. Mit 39 Abbildungen im Text. Jena, Verlag von Gustav Fischer. VIII + 228 S. gr. 8°. 1922.

Erster Teil: Die spezielle Relativitätstheorie (S. 4—129).

Zweiter Teil: Die allgemeine Relativitätstheorie (S. 130—224). Anhang: Kurzer Ausblick auf die Weylsche Theorie.

A. W. Wasiljew, Raum, Zeit, Bewegung. Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie. Mit vier Bildnissen. Berlin, Argonautenverlag. 156 S. 8°. 1922 (russisch).

Weyl, Hermann, Raum — Zeit — Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Mit 23 Textfiguren. (VIII + 338 S.) Verlag von Julius Springer in Berlin W 9. 1923.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.